

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Passeios Aleatórios Clássicos e Quânticos
em Tapetes de Sierpiński**

Por

Daniel Gaspar Gonçalves de Souza

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MAIO DE 2014

**PASSEIOS ALEATÓRIOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS EM
TAPETES DE SIERPIŃSKI**

Daniel Gaspar Gonçalves de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUI-
SITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Renato Portugal, D.Sc.

(Presidente)

Prof. Marco Aurelio Cavalcanti Pacheco, D.Sc.

Prof. Marcos Garcia Todorov, D.Sc.

Prof. Franklin de Lima Marquezino, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
MAIO DE 2014

S729p Souza, Daniel Gaspar Gonçalves de
Passeios aleatórios clássicos e quânticos em tapetes de Sierpiński / Daniel Gaspar Gonçalves de Souza -- Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2014.
xv, 47 p. : il. ; 29 cm.

Orientador: Renato Portugal .

Dissertação (Mestrado) - Laboratório Nacional de Computação Científica, 2014.

1.Computadores quânticos 2.Passeio aleatório 3.Tapete de Sierpiński 4. Desvio padrão 5. Tempo de mistura I. Renato Portugal II. MCT/LNCC; III.Título

CDD - 004.1

I was just guessing at numbers and figures,
pulling the puzzles apart. Questions of
science, science and progress (...)

(Coldplay - The Scientist)

A Deus, à minha querida família e aos
estimados amigos.

Agradecimentos

Antes de tudo gostaria de agradecer a Deus por ter permitido e me ajudado a chegar até este dia em minha vida. Depois, aproveito para agradecer à minha família por todo o apoio que me foi dado durante este curso. Principalmente aos meus pais, Angela e Nilton, por terem me incentivado a sempre buscar mais em minha vida e tentando sempre fornecer toda a infraestrutura para meu desenvolvimento por completo.

Agradeço também ao professor Renato Portugal e ao Professor Demerson Nunes por não só terem me apresentado o mundo da computação quântica, mas por todo o acompanhamento e a orientação ao longo deste Mestrado e da Iniciação Científica da qual participei anteriormente.

Aos meus amigos pelo suporte nas horas de trabalho e pela companhia nas horas de descontração. Agradeço a cada um deles, mas me sinto na obrigação de destacar alguns que tiveram uma importância um pouco maior durante o desenvolvimento deste trabalho nos últimos dois anos: ao Pedro e Fabrício, meus grandes amigos por mais de seis anos que presenciaram meu primeiro contato com essa área e todas as minhas dificuldades e alegrias ao longo desse processo e aos meus colegas do LNCC que estavam sempre juntos, passando pelos mesmos desafios que eu. Lucas, Suelen, Alonso, Natasha, Caio, Vitor, Thiago, *et al.* Infelizmente fui obrigado a truncar a lista de nomes, ou ficaria excessivamente longa para esta seção.

Agradecer à todas as pessoas que me convidaram a viver bons momentos. Especialmente às pessoas aleatórias, que são capazes de compactar infinita alegria em pequenos instantes temporais finitos.

Muito obrigado também a todos do Grupo de Computação Quântica do laboratório pelo suporte em tecnologia, em conhecimento e por serem amigos meus atualmente. De forma mais geral, agradeço a todos as pessoas envolvidas de alguma forma com o LNCC, que nestes seis anos em que piso no laboratório, foram marcando os cantos do mesmo com suas peculiaridades e características que com certeza marcaram minha vida.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro e pelo incentivo não apenas à minha pesquisa, mas por fomentar de forma generalizada a pesquisa em nosso país.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PASSEIOS ALEATÓRIOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS EM TAPETES DE SIERPIŃSKI

Daniel Gaspar Gonçalves de Souza

Maio , 2014

Orientador: Renato Portugal, D.Sc.

Co-orientador: Demerson Nunes Gonçalves, D.Sc.

Passeios aleatórios clássicos e passeios quânticos são estudados em diversos grafos com o objetivo de se obter suas propriedades físicas. Neste trabalho analisamos estes passeios no Tapete de Sierpiński com o foco em duas grandezas físicas: o desvio padrão e o tempo de mistura. Através de simulações e usando regressão dos pontos sobre uma curva, encontramos expressões analíticas para descrever o comportamento do desvio padrão e do tempo de mistura. No caso quântico usamos o programa QWalk para fazer as simulações e gerar as estatísticas. Comparamos os resultados apresentando as vantagens e desvantagens do passeio quântico sobre o clássico.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

**CLASSICAL RANDOM AND QUANTUM WALKS ON
SIERPIŃSKI CARPETS**

Daniel Gaspar Gonçalves de Souza

May, 2014

Advisor: Renato Portugal, D.Sc.

Co-advisor: Demerson Nunes Gonçalves, D.Sc.

Classical random walks and quantum walks are studied in a whole variety of graphs in order to obtain some of its physical properties. In this work we analyze these walks over the Sierpiński Carpet, obtaining two physical quantities: the standard deviation and the mixing time. Using simulations and fitting the points obtained over a curve, we found analytical expressions to describe the behaviour of both the standard deviation and the mixing time. When studying the quantum walk we used the QWalk software to run the simulations and generate statistics. We compare the results presenting the advantages and disadvantages of the quantum walk over the classical random one.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Computação quântica: motivos e definições	1
1.1.1	Motivação	1
1.1.2	Mecânica quântica	3
1.1.3	Computação quântica	6
1.2	Passeios aleatórios	9
1.2.1	Motivação	9
1.2.2	Definição	10
1.2.3	Medidas estatísticas	12
1.3	Passeios quânticos	12
1.4	Fractais	14
1.5	Passeios quânticos em fractais	17
1.6	Tapete de Sierpiński	17
1.7	Estrutura do trabalho	19
2	Passeio aleatório clássico em tapetes de Sierpiński	22
2.1	Dinâmica do passeio aleatório	22
2.2	Desvio padrão	23
2.2.1	Simulação computacional realizada	25
2.2.2	Cálculo da escala	28
2.2.3	Desvio padrão para diversas condições iniciais	29
2.3	Tempo de mistura	31

2.3.1	Definições	31
2.3.2	Obtenção do tempo de mistura	32
3	Passeio quântico em Tapetes de Sierpiński	35
3.1	Simulação usando o software QWalk	35
3.2	Análise do desvio padrão	36
3.3	Análise do tempo de mistura	38
4	Conclusões	41
4.1	Comparação entre passeio aleatório e quântico	41
4.2	Software utilizado	42
4.3	Trabalhos futuros	44
	Referências Bibliográficas	45

Lista de Figuras

Figura

1.1	Gráfico em escala semi-logarítmica do número de componentes por circuito integrado, e a projeção proposta por Moore.	2
1.2	Gráfico em escala semi-logarítmica da quantidade de cálculos por segundo a cada US\$ 1000 de investimento por seus respectivos anos. Cortesia de Ray Kurzweil e Kurzweil Technologies, Inc. [CC-BY-1.0], via Wikimedia Commons.	3
1.3	Representação de um q-bit em uma Esfera de Bloch.	8
1.4	As primeiras gerações de um Conjunto de Cantor. Cada linha representa uma geração. Imagem de domínio público.	15
1.5	As primeiras gerações de uma curva de Koch. Imagem de domínio público.	15
1.6	As primeiras gerações de um Floco de Neve de Koch. Imagem de domínio público.	16
1.7	As primeiras gerações de um Triângulo de Sierpiński. Imagem de domínio público.	16
1.8	Representação do tapete de Sierpiński para diferentes gerações. . . .	18
1.9	Grafo de um Tapete de Sierpiński com $g = 3$. Imagem gerada com o software RWSC apresentado na Seção 4.2.	19
2.1	Possível trajetória de um passeio aleatório de 500 passos em um tapete de Sierpiński de geração 3. Imagem gerada com o software RWSC desenvolvido para este trabalho.	23

2.2	Quatro diferentes distâncias em um tapete com $g = 2$ que podem ser obtidas generalizando a distância Euclidiana. O segmento contínuo representa a distância Euclidiana enquanto o segmento representado com traço-ponto, a menor distância.	24
2.3	Gráfico da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński de geração $g = 6$ e condição inicial $i_0 = 0$	25
2.4	Numeração dos vértices de um tapete de primeira geração.	25
2.5	Pedaço de um tapete com a representação do primeiro passo do processo de numeração dos vértices de um tapete de segunda geração.	26
2.6	Pedaço de um tapete com a representação decimal dos rótulos dos vértices de um tapete de segunda geração.	27
2.7	Gráfico em escala logarítmica da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński de geração $g = 6$ e condição inicial $i_0 = 0$	29
2.8	$\sigma(t)$ calculados para $g = 6$ e $i_0 = 0$	29
2.9	Escalas do desvio padrão para um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński com $g = 6$	30
2.10	Gráfico em escala logarítmica do tempo de cobertura τ_ϵ com $\epsilon = 1,06338 \times 10^{-6}$ em função da quantidade de vértices N em tapetes de Sierpiński de diferentes gerações com condição inicial $i_0 = 0$	32
2.11	Gráfico semi-log do coeficiente a do tempo de mistura em função da precisão ϵ	34
3.1	Gráfico da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio quântico em um tapete de Sierpiński de geração $g = 7$ e condição inicial $i_0 = 0$	36
3.2	Gráfico do $\sigma(t)$ calculado para $g = 7$ e $i_0 = 0$	37

3.3	Gráfico do tempo de mistura τ_ϵ em função do erro desejado ϵ de um passeio quântico em um tapete de Sierpiński de geração $g = 5$ e condição inicial $i_0 = 0$	38
3.4	Gráfico do tempo de mistura τ_ϵ em função da quantidade de elementos N em um tapete de Sierpiński com $\epsilon = 0,004096$ e condição inicial $i_0 = 0$	39
3.5	Gráfico dos valores de a obtidos para os respectivos ϵ	40
4.1	Imagem da tela do software <i>RWSC</i> sendo executado em uma janela do navegador <i>Google Chrome</i> para <i>Linux</i>	43

Lista de Tabelas

Tabela

1.1	Probabilidade da partícula se encontrar na posição n após t passos em um passeio aleatório na linha.	12
2.1	Valores de dígitos para identificar se existe aresta em uma certa direção dado um vértice.	27
2.2	Mudanças que devem ser realizadas nos dígitos menos significativos a fim de obter os rótulos dos vizinhos de um dado vértice.	28
2.3	Valores para a e b obtidos para diversos valores de ϵ utilizando regressão.	33
3.1	Valores para a dado um ϵ fixo determinado.	39
4.1	Expressões para o desvio padrão e tempo de mistura obtidos.	41
4.2	Expressões para o tempo de mistura de passeios clássicos e quânticos para outros grafos.	42

Capítulo 1

Introdução

1.1 Computação quântica: motivos e definições

1.1.1 Motivação

Desde os tempos mais primórdios o ser humano procura desenvolver ferramentas que o auxiliem em suas tarefas cotidianas ou ofereçam uma melhora na qualidade de vida, como a busca incessante pelo fogo ou pela roda até o lançamento de satélites de comunicação. Com o advento da computação esta busca incessante continuou a existir, agora sobre a forma de desejar máquinas cada vez mais potentes para serem capazes de resolver problemas cada vez mais complicados.

Aliada com o desenvolvimento da pesquisa nos últimos anos, que vem alimentando a computação com problemas cada vez mais complexos e cujas soluções são cada vez mais dependentes de recursos, percebemos uma demanda por poder computacional que cresce exponencialmente em relação ao tempo.

Felizmente, por muitos anos, a computação vem conseguindo acompanhar essa demanda e oferecendo uma perspectiva otimista para o futuro. Por exemplo, em (Moore et al., 1965), afirma-se que o poder de computação estava dobrando a cada ano e que deveria se manter assim pelos próximos anos. Esta afirmação foi tão importante para a computação que ficou posteriormente conhecida como **Lei de Moore**. A Figura 1.1 apresenta os dados exibidos na época.

E pelos próximos quarenta anos a teoria de Gordon Moore se mostrou válida. O poder computacional de fato estava dobrando a aproximadamente cada ano.

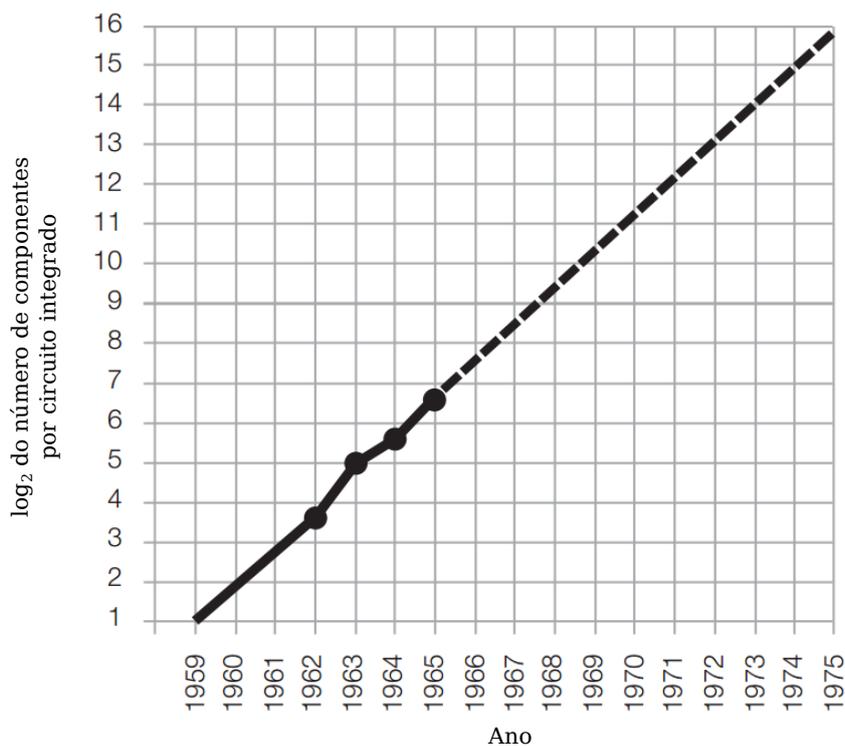


Figura 1.1: Gráfico em escala semi-logarítmica do número de componentes por circuito integrado, e a projeção proposta por Moore.

Mas, como diria a máxima americana, *não existe almoço grátis*. O próprio Moore em 2005 afirma que os transistores irão atingir um limite de miniaturização ao chegar na escala atômica (Dubash, 2005). Além disso, o *International Technology Roadmap for Semiconductors* de 2010, documento lançado por um grupo de indústrias de semicondutores, prevê que a quantidade de componentes eletrônicos em circuitos integrados só dobre a cada três anos.

Todavia, a Lei de Moore não foi a primeira do tipo na história da computação. O poder de computação já crescia exponencialmente desde a época das calculadoras mecânicas, passando pelas máquinas baseadas em relé, válvulas e transistores. A Figura 1.2 mostra o crescimento do poder computacional passando por diversos paradigmas de construção de máquinas diferentes (Kurzweil, 2004).

Kurzweil (2004) também afirma que um novo tipo de tecnologia virá para substituir a atual e manter a Lei de Moore válida. O estado da arte das pesquisas nesta área, apresentam como candidatos a essa vaga a Computação por DNA,

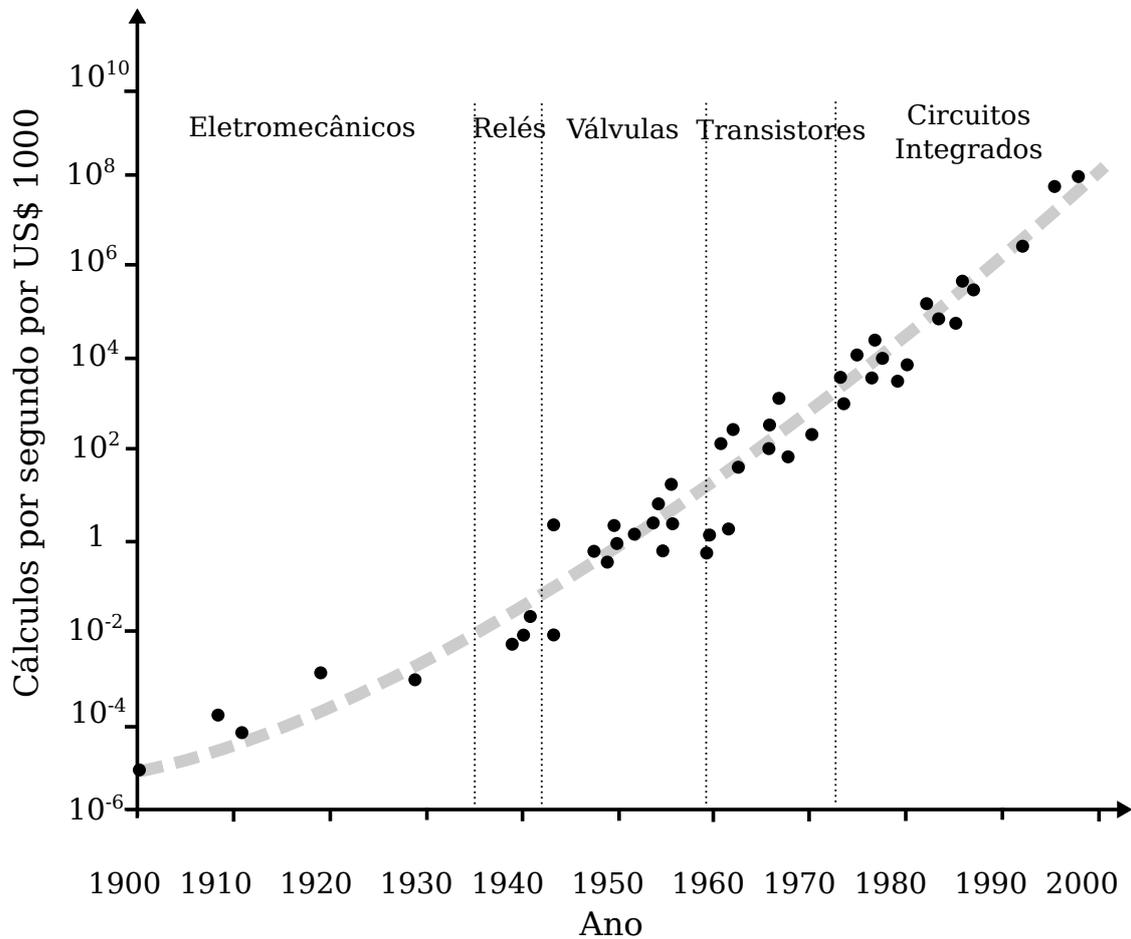


Figura 1.2: Gráfico em escala semi-logarítmica da quantidade de cálculos por segundo a cada US\$ 1000 de investimento por seus respectivos anos. Cortesia de Ray Kurzweil e Kurzweil Technologies, Inc. [CC-BY-1.0], via Wikimedia Commons.

Computação Ótica e Computação Quântica.

Neste trabalho apresentaremos alguns resultados obtidos de passeios quânticos, de onde se derivam alguns algoritmos famosos da Computação Quântica.

1.1.2 Mecânica quântica

A Mecânica Quântica é a área da física que estuda o comportamento de sistemas na escala atômica ou subatômica. Foi no final do século XIX que começou-se a perceber que a teoria física da época (hoje denominada Mecânica Clássica) não era capaz de explicar alguns fenômenos observados nessas escalas suficientemente pequenas. É na primeira metade do século XX que surgem os alicerces da mecânica quântica assinados por nomes como Albert Einstein, Werner Heisenberg, Max

Planck, Louis de Broglie, Niels Bohr, Erwin Schrödinger, entre outros.

Neste trabalho não pretendemos (e nem caberia) nos aprofundar muito na Mecânica Quântica. Apresentamos alguns postulados da mesma que podem ser definidos como as regras do jogo para qualquer um que vai trabalhar direta ou indiretamente com esse campo.

Postulado do Estado: O estado de um sistema físico é a descrição de suas características em um determinado instante de tempo. Um sistema físico isolado qualquer, aos olhos da mecânica quântica, pode ser completamente descrito por um vetor unitário no **espaço de estados**. Este espaço é um espaço vetorial completo dotado de produto interno (um espaço de Hilbert).

É comum, e relativamente útil para operar, utilizar a **notação de Dirac** para representar os vetores de estado. Nesta notação, $|\cdot\rangle$ representa um vetor. Logo, se por ventura $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formarem uma base para um espaço de Hilbert, um estado arbitrário neste espaço será representado como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

onde α, β são números complexos e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ devido à restrição do vetor ser unitário.

Observe, portanto, que um estado pode (e no caso geral irá) estar em uma **superposição** dos elementos da base, comportamento diferente do observado na Mecânica Clássica.

Postulado da Evolução: A evolução, ou seja, como o sistema quântico muda conforme o tempo, é descrita por uma transformação unitária.

Desta forma, se em determinado tempo o estado de um sistema é dado por $|\psi\rangle$, o estado $|\psi'\rangle$ deste mesmo sistema após um determinado tempo é dado por

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle, \quad (1.2)$$

onde U é um operador unitário do espaço de Hilbert associado ao sistema.

Postulado da Medida: Se quisermos obter informações sobre o estado de um sistema quântico é necessário realizar uma medida. Uma medida quântica é descrita por um conjunto de operadores $\{M_m\}$ que atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice m se refere aos possíveis resultados de saída. Medindo um sistema com estado $|\psi\rangle$, a probabilidade do resultado da medida ser m é dada por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (1.3)$$

onde $\langle \psi |$ é o complexo-conjugado transposto de $|\psi\rangle$. O estado do sistema após a medida será

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (1.4)$$

Quando enunciamos o postulado da Evolução, estávamos nos referindo a um sistema físico isolado. De fato isto está correto. Mas quando precisamos realizar alguma medição a fim de obter conhecimento sobre alguma grandeza precisaremos romper este isolamento. Por isto que este tipo de operadores está sujeito ao seu próprio postulado.

Observe que a operação de medição provoca uma alteração no estado (o estado pós-medida $|\psi'\rangle$ é diferente do $|\psi\rangle$ original). Para ser mais preciso, uma medição faz com que o estado do sistema colapse para um subespaço do espaço de Hilbert original gerado pelo resultado da medida.

Uma analogia muito famosa na literatura da Mecânica Quântica para exemplificar os postulados de Estado e de Medida é a história do **Gato de Schrödinger**, apresentada em Schrödinger (1935). Nela, hipoteticamente, um gato é colocado dentro de uma caixa totalmente selada junto com um elemento radioativo que em uma hora libera um elétron com probabilidade de 50% ou nenhum com o restante da probabilidade e um contador Geiger que, ao detectar a mínima radiação, solta um martelo que quebra um vidro de veneno¹. Podemos afirmar que, depois de uma hora selado nesta caixa, o estado do gato está em uma superposição de vivo

¹ No artigo original, Schrödinger disse que seria um vidro de Cianeto de Hidrogênio, um composto extremamente volátil e venenoso.

e morto com 50% de probabilidade para cada. Além disso, ao abrirmos a caixa e olharmos, o estado do gato será apenas vivo ou apenas morto dependendo da sorte do animal. Este comportamento é análogo ao colapso que um estado quântico sofre após uma medição.

Postulado da Composição de Sistemas: Vamos agora imaginar o caso que estejamos observando um sistema que pode ser decomposto em mais de um sub-sistema. O estado do sistema composto será o produto tensorial dos estados dos sistemas individuais. Se tivermos n sistemas, cada um no estado $|\psi_i\rangle$, o estado do sistema completo é

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (1.5)$$

O produto tensorial \otimes utilizado é o **produto de Kronecker** (Nielsen e Chuang, 2010; Portugal, 2013).

Um detalhe interessante é que ao evoluir um sistema composto como o da Fórmula 1.5, o estado posterior não será necessariamente fatorável da mesma forma. Este fenômeno é conhecido como **emaranhamento quântico** e é bem distinto dos fenômenos observados na mecânica clássica.

1.1.3 Computação quântica

Feynman (1982) começou a indagar se seria eficiente simular fenômenos quânticos em computadores. Posteriormente, ao verificar que a resposta para esta pergunta seria negativa nos computadores da época, propõe realizar computação com fenômenos quânticos.

A computação, como já comentamos na Subseção 1.1.1, é baseada em princípios físicos. Por exemplo, os computadores de hoje são em sua maioria baseados em materiais semicondutores onde o valor 1 é codificado com um certo potencial elétrico (geralmente 5V) e o valor 0 com outro (geralmente 0V). Da mesma forma, nada nos impede de desenvolver computadores baseados inteiramente na mecânica clássica, como calculadoras baseadas em engrenagens, polias, eixos e alavancas.

Analogamente podemos propor um computador que use os fenômenos quânticos para fazer o seu processamento de dados e tratamento de informação. Foi justamente o que começou a ser pensado na década de 80.

Assim como o **bit** é a menor unidade de informação da computação clássica e do qual é composta a memória neste computador, podemos definir um **q-bit**, ou **bit quântico** como a menor quantidade de informação em um computador quântico.

Basicamente, um q-bit é um sistema quântico de dois estados, como por exemplo a polarização de um fóton. Logo, de acordo com o postulado do Estado, podemos definir o estado de um q-bit por um vetor no \mathbb{C}^2 . Podemos representar este vetor como a soma de elementos da base. Uma base ortonormal muito utilizada na computação quântica é a **base computacional** $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Logo um q-bit pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.6)$$

onde α, β são números complexos e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ conforme já vimos na Equação 1.1.

É importante ressaltar que, portanto, diferentemente do caso clássico, onde um bit só pode assumir os valores zero ou um, um q-bit pode assumir zero, um, ou uma superposição de zero e um ao mesmo tempo! Na verdade, ele pode assumir qualquer superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. É possível armazenar, teoricamente, informação infinita nos valores de α e β , chamados de **amplitudes**.

Outra representação possível para um q-bit, uma vez que o vetor precisa ser unitário, é como um vetor na **Esfera de Bloch**. Esta é uma esfera onde os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ se encontram nos polos e um q-bit arbitrário pode estar em qualquer ponto da superfície da esfera. A Figura 1.3 mostra uma possível representação para um q-bit.

Apesar da **superposição** dos estados da base parecer uma solução milagrosa para a computação, o postulado da medida nos impede de obtermos diretamente nestes valores. Não conseguimos trazer para o mundo clássico as amplitudes. O

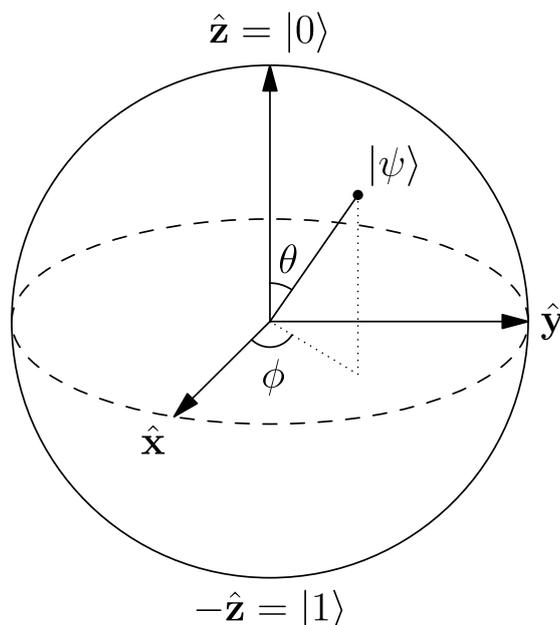


Figura 1.3: Representação de um q-bit em uma Esfera de Bloch.

resultado de uma medição sempre será um vetor de uma base. Neste caso, ao medirmos o estado $|\psi\rangle$ da Equação 1.6 iremos obter $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ mas nunca os valores de α e β . As amplitudes vão influenciar na probabilidade dos resultados saírem apenas.

Geralmente os algoritmos quânticos terminam com uma medição para obter o retorno do mesmo. E mesmo caso a resposta desejada seja um vetor de uma base pré-determinada, um computador quântico é probabilístico. No caso geral não podemos afirmar qual será o resultado de uma medição (apenas somos capazes caso o estado seja um vetor da base). Desta forma, por exemplo, alguns algoritmos quânticos se baseiam na **amplificação de amplitudes** para aumentar a probabilidade do resultado desejado ser obtido na medição.

Portanto, ao avaliar a complexidade de um algoritmo quântico, mesmo que uma operação seja realizada eficientemente em um computador quântico, é necessário verificar se outros processos serão necessários para preparar o resultado para uma medição.

É conhecido que computadores quânticos não irão resolver problemas que atualmente não são computáveis. Inclusive computadores clássicos podem simu-

lar computadores quânticos e vice-versa. Porém foram apresentados algoritmos quânticos mais eficientes do que qualquer algoritmo clássico possível, mostrando que para alguns problemas o computador quântico será mais eficiente (Nielsen e Chuang, 2010; Portugal, 2013).

Com efeito, não podemos afirmar que o computador quântico irá substituir o clássico. Acreditamos que com o desenvolvimento da tecnologia teremos a concomitância das tecnologias clássicas e quânticas, cada uma resolvendo de forma mais eficiente certas classes de problemas.

Um problema para ser resolvido eficientemente em um Computador Quântico exige uma abordagem completamente diferente de seu algoritmo clássico. Normalmente será necessário utilizar os conceitos de **superposição**, **emaranhamento** e **paralelismo** quânticos para obter um algoritmo eficiente. Mas isto não é garantia de ser mais eficiente que seu respectivo algoritmo clássico.

1.2 Passeios aleatórios

1.2.1 Motivação

A grande maioria dos modelos que utilizamos para simular determinados comportamentos do mundo é composta pelos ditos **determinísticos**. Isto significa que uma vez fixada a entrada e o algoritmo podemos afirmar com certeza qual será a saída do mesmo. Por exemplo, em modelos invariantes com o tempo, ao executar mais de uma vez o mesmo algoritmo com a mesma entrada, é esperada a mesma saída.

Mas nem tudo em nosso ambiente pode ser facilmente simulado com algoritmos determinísticos. Desde o final do século XVIII, cientistas se deparam com movimentos que são totalmente regidos ao acaso, como poeira de carbono em álcool, pólen sobre a linha d'água ou partículas em um fluido (como as moléculas de um gás). A este fenômeno foi dado o nome de **movimento Browniano**².

Em uma escala macroscópica, podemos pensar no problema de modelar o

² Em homenagem a Robert Brown, um dos primeiros cientistas a observar tal movimento, em grãos de pólen em água.

andar do bêbado. Dependendo de seu estado ético e de sua determinação de chegar em casa (ou em outro bar), cada passo do mesmo pode ser visto como um evento probabilístico, onde ele tem uma certa *chance* de ir para a esquerda e outra para a direita.

Em todos estes exemplos, não é possível afirmar **com certeza** qual a posição do elemento depois de um tempo determinado. Mesmo que simulemos as mesmas condições iniciais não há garantia nenhuma de que a poeira, o pólen e o bêbado realizem o mesmo percurso. A estes processos é dado o nome de **processos estocásticos** ou **aleatórios**. Como exemplos mais simples, podemos pensar no resultado do lançamento de um dado ou uma moeda.

1.2.2 Definição

Pode-se definir passeios aleatórios discretos ou contínuos. Nosso foco será em passeios discretos. Neste modelo, o tempo é discretizado e nossa partícula, a cada instante de tempo, joga uma moeda (ou um dado) e dá um passo em uma certa direção, dependendo do resultado do lançamento da moeda.

Inicialmente, uma **cadeia de Markov com espaço de estados Ω e matriz de transição M** é uma sequência de variáveis aleatórias (X_0, X_1, \dots) tal que para todo $x, y \in \Omega$, todo $t \geq 1$, e para todos os eventos $H_{t-1} = \bigcap_{s=0}^{t-1} \{X_s = x_s\}$ que satisfazem $P(H_{t-1} \cap \{X_t = x\}) > 0$ temos

$$P(X_{t+1} = y | H_{t-1} \cap \{X_t = x\}) = P(X_{t+1} = y | X_t = x) = M(x, y),$$

onde $M(x, y)$ é a probabilidade de sair de um estado y para um x . Isto implica que esta $M(x, y)$ é a mesma, não importando qual a sequência x_0, x_1, \dots, x_{t-1} de estados anteriores ao x atual.

Observe que M é uma **matriz estocástica**, pois suas entradas são todas não-negativas e

$$\sum_{x \in \Omega} M(n, x) = 1 \quad \forall n \in \Omega.$$

Caso o espaço de dados Ω seja finito, a denominação de **cadeia de Markov finita** pode ser utilizada (Levin et al., 2009).

Um **grafo não-orientado** $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de **vértices** V e um conjunto de **arestas** A com $A \in \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$. Quando $\{x, y\} \in A$ dizemos que y é um **vizinho** de x e vice-versa. O **grau** de um vértice x , dado por $\deg(x)$ é o número de vizinhos de x .

Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos um **passeio aleatório** em G como sendo a cadeia de Markov com espaço de estados V e matriz de transição

$$M(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{se } x \text{ for vizinho de } y \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Isto significa que quando a partícula se encontra em um vértice x , no próximo intervalo de tempo ela irá se movimentar de forma uniformemente aleatória para um de seus vizinhos (Levin et al., 2009).

O exemplo mais simples para definir um passeio aleatório é o Passeio na Linha. Suponhamos que exista uma partícula em uma reta numérica sobre um valor específico e que o tempo seja definido de forma discreta. Sem perda de generalidade, podemos dizer que a partícula se encontra inicialmente sobre o zero. Esta carrega com ela uma moeda que é jogada a cada passo de tempo. Se der cara, a partícula se move para o número inteiro a esquerda, se der coroa ela se move para a direita.

Se consideramos a moeda como sendo não-viciada (mesma chance de sair cara ou coroa), depois do primeiro passo, a partícula estará localizada no número -1 com uma probabilidade de 0.5 e em 1 com a mesma probabilidade (Portugal, 2013).

A mesma estratégia pode ser aplicada para uma malha bidimensional regular. Neste caso estaríamos definindo um passeio aleatório sobre o \mathbb{Z}^2 . Mas, ao invés de carregar consigo uma moeda, a partícula levará um dado de quatro lados. Cada lado seria associado *a priori* com uma direção a ser tomada.

1.2.3 Medidas estatísticas

Apesar de não podermos afirmar sobre a posição da partícula após um determinado número de passos, podemos calcular algumas medidas estatísticas a respeito do modelo do passeio aleatório. Por exemplo, a distribuição de probabilidade do caminhante após um certo número de passos é determinável.

Para um passeio aleatório na linha, onde a partícula tem 50% de probabilidade de ir para esquerda e a mesma probabilidade para a direita, partindo da posição $n = 0$, a distribuição das probabilidades da partícula se encontrar em uma posição n após t passos é dada pela Tabela 1.1 (Portugal, 2013).

$t \backslash n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Tabela 1.1: Probabilidade da partícula se encontrar na posição n após t passos em um passeio aleatório na linha.

Além da distribuição de probabilidades, podemos também calcular a esperança (ou média) da posição do caminhante e seu desvio-padrão.

1.3 Passeios quânticos

Podemos definir uma generalização dos passeios aleatórios apresentados na seção anterior utilizando conceitos da Mecânica Quântica. Neste caso a partícula será representada por um vetor no espaço de Hilbert e a evolução do passeio será dada por um operador unitário. Podemos definir o passeio quântico com tempo discreto ou contínuo. Neste trabalho usaremos apenas passeios em tempo discreto.

O passeio aleatório em uma malha bidimensional pode ser definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_\infty \otimes \mathcal{H}_\infty$. Neste caso, $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ é o subespaço associado à operação da moeda e o $\mathcal{H}_\infty \otimes \mathcal{H}_\infty$ o subespaço associado à posição da partícula na

malha. A base canônica para o subespaço moeda é $\mathcal{B}_C = \{|j, k\rangle : j, k \in \{0, 1\}\}$ e para o subespaço posição é $\mathcal{B}_P = \{|x, y\rangle : x, y \in \mathbb{Z}\}$ (Marquezino, 2010).

O estado da partícula em um passeio quântico após t passos é dado por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k,x,y}(t) |j, k\rangle |x, y\rangle \quad (1.8)$$

com $\alpha_{j,k,x,y}(t) \in \mathbb{C}$ e $\sum_{j,k=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} |\alpha_{j,k,x,y}(t)|^2 = 1$ para todo t .

O operador evolução de um passeio quântico com moeda como este é dado por $U = S(C \otimes I_P)$ onde I_P é o operador identidade sobre o subespaço associado à posição da partícula. Ou seja, a evolução se dá em dois passos: uma aplicação de um operador C apenas sobre o espaço da moeda seguida de uma aplicação de um operador S sobre o estado inteiro.

A matriz C pode ser qualquer matriz unitária de tamanho 4 por 4 e entradas complexas e muitas das vezes é denominada apenas de **moeda**. Particularmente, podemos usar algumas moedas famosas na literatura como a de Hadamard, dada por

$$H_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

a de Fourier, definida por

$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

e a de Grover, dada pela matriz

$$G_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

O operador S também pode ser definido arbitrariamente, desde que seja unitário e uma translação no plano baseada em alguma condição. Marquezino e Portugal (2008) descreveram o seguinte operador para uso na malha:

$$S_b = \sum_{j,d=0}^1 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} |j, d\rangle \langle j, d| \otimes |x + (-1)^j(1 - \delta_{j,d}), y + (-1)^j \delta_{j,d}\rangle \langle x, y|. \quad (1.12)$$

Expandindo o somatório sobre j, d fica mais claro como o operador S_b atua sobre o estado anterior:

$$\begin{aligned} S_b = \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} & (|00\rangle \langle 00| \otimes |x, y + 1\rangle \langle x, y| + \\ & |01\rangle \langle 01| \otimes |x + 1, y\rangle \langle x, y| + \\ & |10\rangle \langle 10| \otimes |x - 1, y\rangle \langle x, y| + \\ & |11\rangle \langle 11| \otimes |x, y - 1\rangle \langle x, y|). \end{aligned} \quad (1.13)$$

É importante lembrar que o estado da moeda pode, e no caso geral vai, estar em uma superposição destes j, d . Logo, durante a evolução, a partícula pode se movimentar para mais de uma direção ao mesmo tempo.

1.4 Fractais

Um fractal é uma estrutura cujas partes são similares com o todo de alguma forma. Mais precisamente, quando nos referimos a um conjunto F como sendo fractal, normalmente temos uma estrutura densa, com detalhes em escalas arbitrariamente pequenas, usualmente com auto-similaridade, com uma *dimensão fractal*

maior que sua dimensão topológica e na maioria dos casos podendo ser definida recursivamente de forma mais simples (Mandelbrot, 1982; Feder, 1988).



Figura 1.4: As primeiras gerações de um Conjunto de Cantor. Cada linha representa uma geração. Imagem de domínio público.

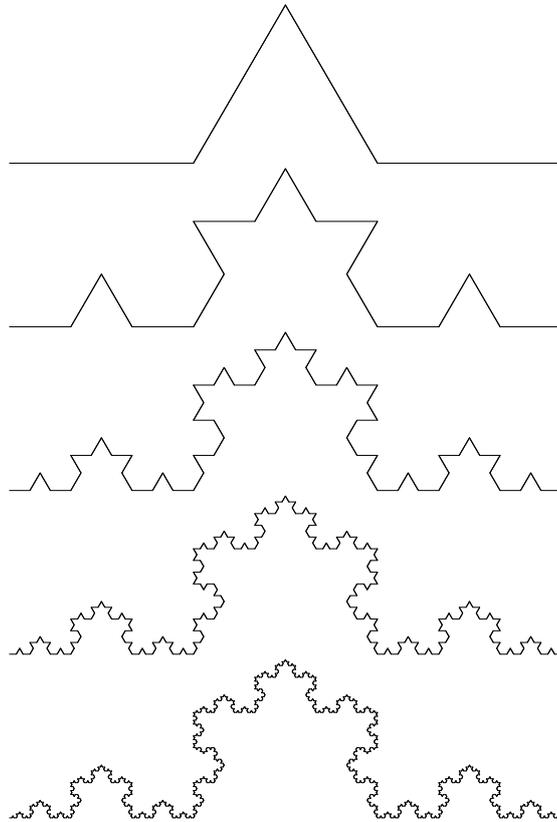


Figura 1.5: As primeiras gerações de uma curva de Koch. Imagem de domínio público.

O termo **fractal** foi criado em Mandelbrot (1982) advindo do termo *fractus* em Latim, que significa quebrado, partido. Neste mesmo trabalho, o autor mostra que o estudo da Geometria, na época, não se importava com diversas formas existentes na natureza. E que destas formas ditas fractais, as mais interessantes tendem a ser escaláveis, implicando que tanto a fragmentação quanto as irregularidades são idênticas em todas as escalas.

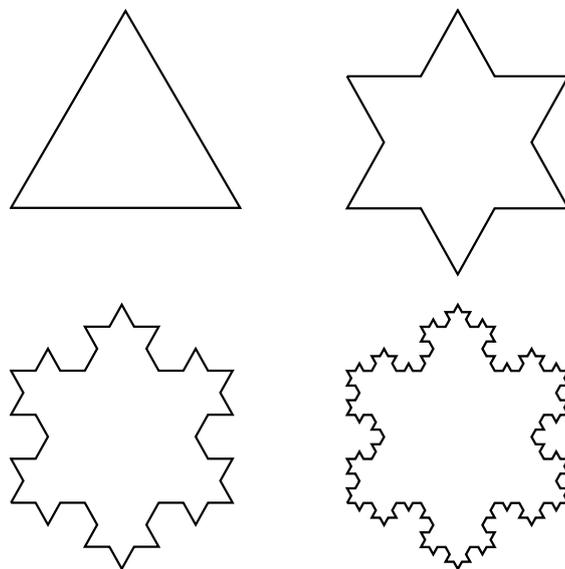


Figura 1.6: As primeiras gerações de um Floco de Neve de Koch. Imagem de domínio público.

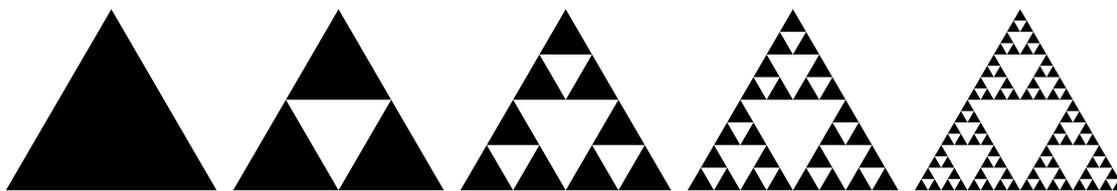


Figura 1.7: As primeiras gerações de um Triângulo de Sierpiński. Imagem de domínio público.

Apesar de por definição uma geometria fractal apresentar esse comportamento para escalas infinitamente pequenas, para representar os mesmos iremos sempre trabalhar truncando tal comportamento repetido. A cada iteração da recursão para a criação do mesmo daremos o nome de **geração**. O limite no número de gerações, no caso computacional, se dará pela complexidade de processamento ou pelo aumento exponencial do espaço de dados para armazenar tal forma.

Fractais são conjuntos de pontos que podem representar curvas, ou superfícies. Exemplos famosos de fractais na literatura são o conjunto de Cantor (Figura 1.4), a Curva de Koch (Figura 1.5), o Floco de Neve de Koch (Figura 1.6), o Triângulo de Sierpiński (Figura 1.7) e o Tapete de Sierpiński.

A **dimensão fractal** de um conjunto F é dada por

$$\Delta(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|}, \quad (1.14)$$

onde $N(\epsilon)$ é a quantidade de intervalos de comprimento ϵ disjuntos e não-vazios necessários para cobrir todo o F (Mandelbrot, 1986, 1982; Feder, 1988; Falconer, 1990; Tricot, 1995).

1.5 Passeios quânticos em fractais

Diversos autores já estudaram o comportamento de passeios quânticos em grafos baseados em uma topologia fractal. Muitas das vezes concluem a comparação dos passeios com os análogos clássicos aleatórios nas mesmas malhas.

Agliari et al. (2010) apresenta o estudo de um passeio quântico em tempo contínuo em um Triângulo de Sierpiński. Este mesmo fractal serve de base para Lara et al. (2013) estudar o passeio quântico em tempo discreto.

1.6 Tapete de Sierpiński

Um **tapete de Sierpiński** é uma a matriz bidimensional $S(g)$ de tamanho $3^g \times 3^g$ com $g \in \mathbb{Z}_+^*$ com elementos $(s_{i,j})_{i,j \geq 0}$ definida da seguinte forma: Sejam $x = a_{g-1} \dots a_0$ e $y = b_{g-1} \dots b_0$ as representações de i e j na base 3, respectivamente. Então, $s_{i,j} = 0$ se e somente se $\exists 0 \leq s < g$ tal que $a_s = b_s = 1$. Caso contrário, $s_{i,j} = 1$. g é dito quantidade de **gerações** do fractal.

Este fractal foi descrito pela primeira vez pelo matemático polonês Waław Sierpiński no início do século XX e portanto, leva o seu nome, assim como outros fractais definidos pelo mesmo (Sierpiński, 1916).

Portanto, o tapete de Sierpiński de geração 2 é dado por

$$S(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Caso representemos cada 0 no tapete por um quadrado branco e todo 1 por um quadrado preto, obtemos para as primeiras gerações as imagens mostradas na Figura 1.8.

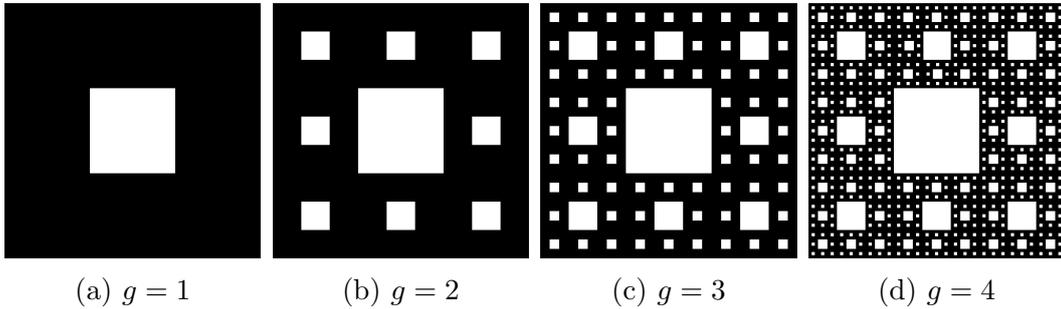


Figura 1.8: Representação do tapete de Sierpiński para diferentes gerações.

Perceba que a formação do tapete pode ser realizada recursivamente, dividindo a área em uma grade 3x3 e removendo o conteúdo do meio. Aplicando esta remoção recursivamente em cada uma das 8 partes que restaram é possível gerar as próximas gerações do fractal (Allouche e Shallit, 2003).

A dimensão fractal do Tapete de Sierpiński, dada pela fórmula 1.14 é dada por $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,893$.

Inicialmente precisamos definir um grafo no qual iremos realizar o passeio aleatório. Barlow e Bass (1999) mostram em uma figura um grafo que apresenta

características de um tapete de Sierpiński. Esta ideia irá definir a malha que usaremos no restante deste capítulo.

O grafo é baseado em um *lattice* regular bidimensional com alguns dos vértices removidos para apresentar a estrutura de um tapete de Sierpiński. A malha original deve possuir $3^g \times 3^g$ vértices, onde g é a geração do tapete. Durante a remoção dos vértices, as arestas que partem deles também serão removidas. Finalmente, a condição de contorno que será adotada é fechar a malha em um formato de *torus*. A Figura 1.9 mostra um grafo gerado a partir de um tapete de Sierpiński de geração 3.

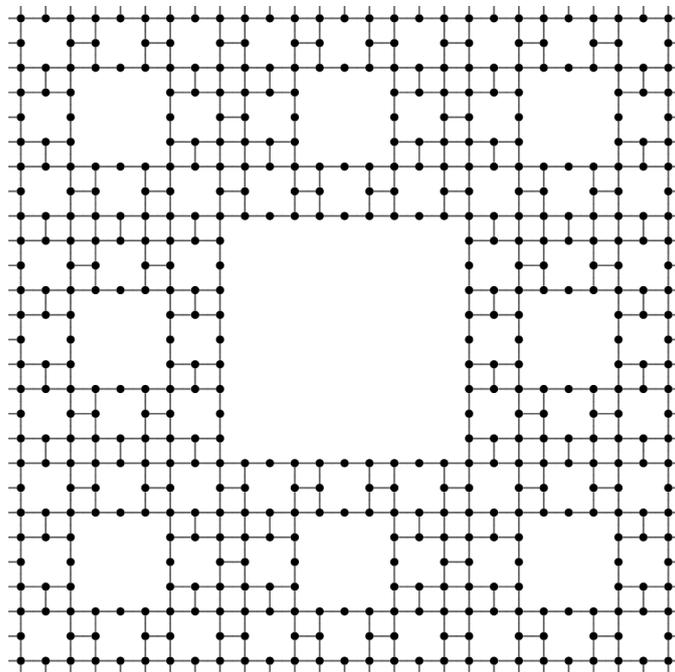


Figura 1.9: Grafo de um Tapete de Sierpiński com $g = 3$. Imagem gerada com o software **RWSC** apresentado na Seção 4.2.

1.7 Estrutura do trabalho

Neste trabalho definimos um passeio aleatório e um passeio quântico em um grafo baseado em um tapete de Sierpiński. Após a definição apresentamos resultados de simulações computacionais de ambos os casos para obtenção de certas grandezas estatísticas. Chegamos, portanto, a uma expressão para o desvio padrão

e para o tempo de mistura³ de ambos os passeios nessa malha. Finalmente, concluímos comparando os resultados a fim de justificar a utilidade do estudo dos passeios quânticos.

Neste capítulo foram apresentados alguns conceitos que serão fundamentais para o desenrolar do trabalho. Obviamente que não estávamos objetivando fazer um resumo completo (e nem caberia neste trabalho) dos temas apresentados. Porém deixamos as referências como um convite ao leitor que estiver mais afastado dos respectivos temas.

No Capítulo 2 iremos apresentar o passeio aleatório clássico em um tapete de Sierpiński. Iremos definir nossa metodologia, inclusive entrando em alguns detalhes a respeito da implementação. Apesar de não apresentarmos todos os detalhes da simulação, acreditamos que caso algum leitor tenha interesse será capaz de reproduzir nossos experimentos. Finalmente apresentamos os resultados obtidos: uma expressão para o desvio padrão do caminhante e uma outra para o tempo de mistura, em função do tamanho do tapete e do erro desejado.

Esta mesma estrutura será usada no Capítulo 3, mas para o passeio quântico neste mesmo fractal. A metodologia, obviamente, será um pouco diferente e será apresentada a solução para outros problemas que aparecem durante a simulação. Terminando este, apresentamos os mesmos resultados do capítulo anterior já permitindo que o leitor atento compare as expressões com as obtidas no capítulo anterior.

Para fechar este trabalho, apresentamos uma análise dos resultados obtidos com uma ênfase justamente na comparação entre os passeios aleatório e quântico. Isto será apresentado no Capítulo 4 juntamente com uma relação de possíveis trabalhos futuros.

Durante a escrita deste trabalho procuramos ser bem didáticos, apesar da contra-intuitividade que alguns conceitos da mecânica quântica podem ter para os leitores que não estão acostumados com eles. Por este motivo pedimos paciência

³ Ambos serão definidos no Capítulo 2.

para aqueles que já estudaram ou são especialistas nos conceitos apresentados.

Allons-y!

Capítulo 2

Passeio aleatório clássico em tapetes de Sierpiński

2.1 Dinâmica do passeio aleatório

O passeio aleatório no tapete de Sierpiński pode ser modelado como

$$\vec{s}(t) = M^t \times \vec{s}(0) \tag{2.1}$$

com $\vec{s}(t) \in \mathbb{R}^n$ representando a distribuição de probabilidade do caminhante após t passos, M sendo a matriz estocástica definida em (1.7). $\vec{s}(0)$ é chamado de **vetor condição inicial** e suas componentes $s_i(0)$, $0 < i < n$. Definimos $s_i(0) = 1$ se $i = i_0$ e $s_i(0) = 0$ se $i \neq i_0$, onde i_0 denomina-se **vértice inicial** e deve ser fixado *a priori*. Observe que só precisamos gerar, tanto a matriz estocástica quanto os vetores de estado para os pontos válidos do tapete (pontos para os quais $s_{i,j} = 1$). Portanto, $n = 8^g$.

O fato de $\vec{s}(0)$ só possuir uma componente diferente de zero, e igual a um, faz com que o passeio se inicie com o caminhante definido em uma posição fixa do tapete, e a partir dela, atingir seus vizinhos com certa probabilidade.

Os vértices do grafo não possuem o mesmo grau, como pode ser visto na Figura 1.9. Por isso, a cada passo de tempo o caminhante irá jogar uma moeda ou um dado com a mesma quantidade de lados quanto o grau do vértice atual, e associar a cada lado *a priori* uma direção a ser tomada. Finalmente, ele toma a

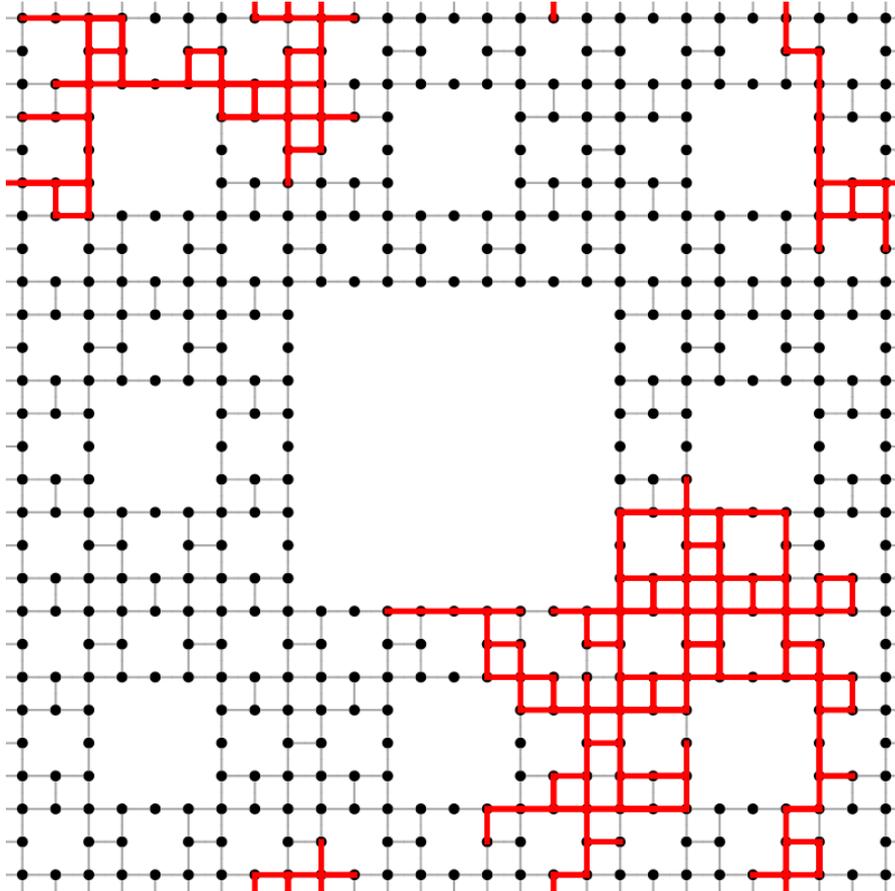


Figura 2.1: Possível trajetória de um passeio aleatório de 500 passos em um tapete de Sierpiński de geração 3. Imagem gerada com o software RWSC desenvolvido para este trabalho.

direção baseada no resultado do lançamento.

A Figura 2.1 mostra um possível trajeto do caminhante em um tapete de geração 6 após 500 passos.

2.2 Desvio padrão

O desvio padrão de um caminhante em um passeio aleatório após t passos é dado por

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} d^2(i, i_0) s_i(t) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} d(i, i_0) s_i(t) \right)^2}, \quad (2.2)$$

onde $s_i(t)$ é a probabilidade da partícula se encontrar na posição i depois de t passos, ou seja, a i -ésima componente do vetor $\vec{s}(t)$, e $d(i, i_0)$ representa uma generalização da distância Euclidiana entre o vértice i e o vértice inicial, dada pelo

comprimento do menor segmento de reta ligando os dois vértices (Mood et al., 1950).

Esta generalização se dá devido ao fato do grafo ser fechado nas bordas como um **torus**, e nem sempre a distância Euclidiana representará a menor reta, como ilustra a Figura 2.2.

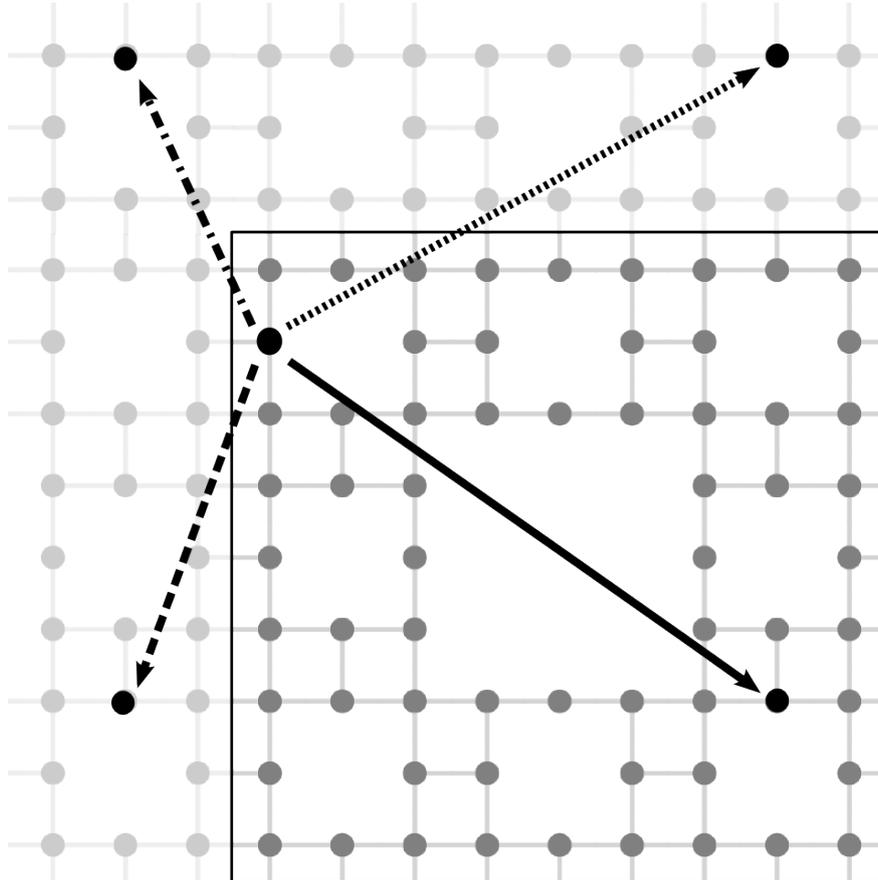


Figura 2.2: Quatro diferentes distâncias em um tapete com $g = 2$ que podem ser obtidas generalizando a distância Euclidiana. O segmento contínuo representa a distância Euclidiana enquanto o segmento representado com traço-ponto, a menor distância.

Nós, através de uma simulação computacional, calculamos $\sigma(t)^2$ para $0 < t < t_{MAX}$. Na prática, devido à implementação, $t_{MAX} \leq \frac{3g}{2}$. Simulando um passeio em um tapete com geração $g = 6$, com vértice inicial $i_0 = 0$ obtivemos os pares $(t, \sigma(t))$ apresentados no gráfico da Figura 2.3.

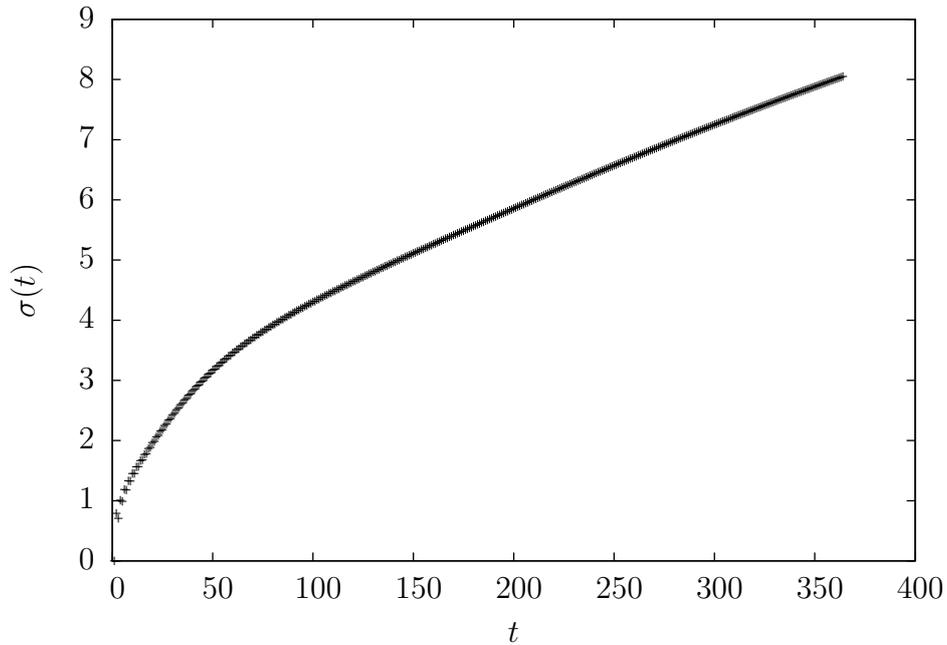


Figura 2.3: Gráfico da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński de geração $g = 6$ e condição inicial $i_0 = 0$.

2.2.1 Simulação computacional realizada

Para realizar a simulação computacional do passeio, foi criado um programa na linguagem *C* que implementa os passos do passeio aleatório. Este programa não aloca a matriz de adjacência inteira da malha, pois devido a uma atribuição de rótulos específica dos vértices, é capaz de saber o grau e os vizinhos dado o código de um dos vértices.

Inicialmente, esta numeração se dá na primeira geração. Os vértices são numerados seguindo a lógica apresentada na Figura 2.4.

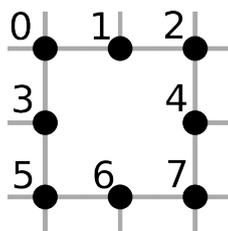


Figura 2.4: Numeração dos vértices de um tapete de primeira geração.

Os vértices de tapete de geração n serão numerados iniciando pelo processo

de numeração dos oito sub-tapetes de geração $n - 1$ que o forma adicionando-se um dígito mais significativo que determina qual a posição do respectivo sub-tapete. Neste caso, a lógica deste dígito é a mesma utilizada para a primeira geração. A figura 2.5 mostra este primeiro passo da numeração de um tapete de geração $g = 2$.

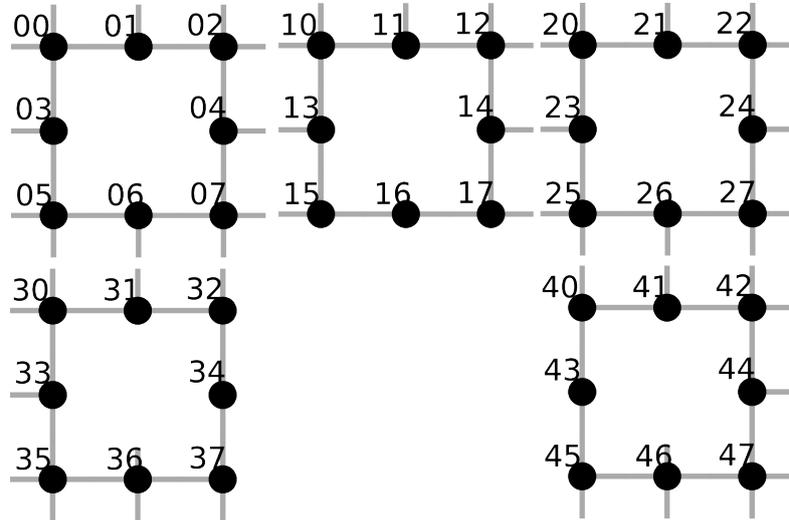


Figura 2.5: Pedaco de um tapete com a representação do primeiro passo do processo de numeração dos vértices de um tapete de segunda geração.

Finalmente, para uma questão de armazenamento em disco, armazenamos o rótulo de cada vértice como um número inteiro em octal. Desta forma, ao ver o tapete na base decimal, iremos obter uma distribuição de rótulos conforme a Figura 2.6.

Rotulando conforme esta lógica os vértices, é possível saber o grau de um vértice apenas pelo seu rótulo. Apesar da malha ter condições de contorno cíclicas, convencionamos, sem perda de generalidade, dado um corte conforme a Figura 2.6, as direções possíveis como sendo para cima, baixo, esquerda e direita. Neste exemplo, ir para *cima* a partir do vértice 25 implica em chegar no vértice 6.

Com esta convenção é possível saber a quantidade de vizinhos testando se o rótulo permite andar nestas quatro direções. Para isso é necessário avaliar os dígitos menos significativos na representação octal do rótulo. Se, após descartar certos dígitos menos significativos conforme apresentado na Tabela 2.1, não sobrem dígitos ou o menos significativo dos que sobrarem for diferente de um certo valor,

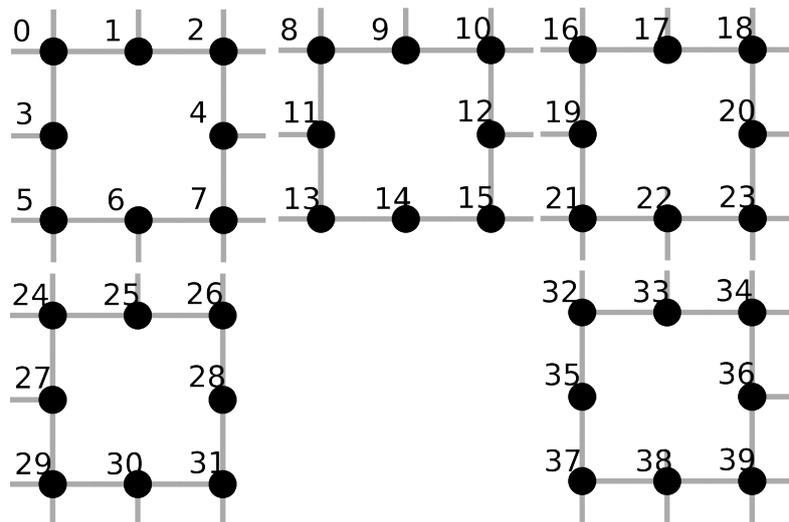


Figura 2.6: Pedaço de um tapete com a representação decimal dos rótulos dos vértices de um tapete de segunda geração.

também dado pela Tabela 2.1, existe ligação naquela direção.

Direção	Dígitos para descartar	Dígito final diferente de
Baixo	5,6,7	1
Cima	0,1,2	6
Esquerda	0,3,5	4
Direita	2,4,7	3

Tabela 2.1: Valores de dígitos para identificar se existe aresta em uma certa direção dado um vértice.

Finalmente, para eliminar totalmente a necessidade de alocar e gerar toda a matriz de adjacência do grafo, além do grau dos vértices é preciso saber, dado um rótulo, qual é o rótulo dos vizinhos. Usando a mesma abstração do corte apresentada nos últimos parágrafos, é possível chegar no vértice do vizinho apenas mudando o dígito menos significativo da representação octal do rótulo. Para alguns casos, é necessário aplicar a mudança recursivamente para o próximo dígito menos significativo.

A Tabela 2.2 mostra qual mudança deve ser feita no dígito menos significativo. As alterações marcadas com asterisco devem ser aplicadas recursivamente no próximo dígito menos significativo.

Dígito atual	será mudado para			
	Cima	Esquerda	Direita	Baixo
0	5*	2*	1	3
1	6*	0	2	6
2	7*	1	0*	4
3	0	4*	4	5
4	2	3	3*	7
5	3	7*	6	0*
6	1	5	7	1*
7	4	6	5*	2*

Tabela 2.2: Mudanças que devem ser realizadas nos dígitos menos significativos a fim de obter os rótulos dos vizinhos de um dado vértice.

2.2.2 Cálculo da escala

Barlow e Bass (1992) dizem que a densidade de transição de um passeio aleatório sobre um tapete de Sierpiński é da forma $\sigma(t) = at^b$ e não é capaz de definir b . Neste trabalho nós iremos simular computacionalmente o passeio aleatório para obter um valor para b , chamado **escala do desvio padrão**.

De fato, ao plotar o gráfico apresentado anteriormente na Figura 2.3 usando escalas logarítmicas para ambos os eixos obtemos uma figura muito próxima a uma reta (veja Figura 2.7). Então prosseguimos com nossa hipótese de aproximar a função do desvio como $\sigma(t) = at^b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Para minimizar erros, devido ao fato de termos pontos mais condensados para intervalos superiores, normalizamos a quantidade de pontos por intervalo, escolhendo aleatoriamente 20 pontos dentro de cada intervalo $[3^i, 3^{i+1}[$ com $3 \leq i \leq g - 2$ e descartamos os pontos iniciais. Finalmente, nós aplicamos o método dos mínimos quadrados para realizar uma regressão desta função sobre os pontos. A Figura 2.8 mostra uma possível escolha dos pontos e sua respectiva $\sigma(t)$ obtida por regressão.

Como a escolha dos pontos aleatórios influencia no cálculo da escala do desvio padrão, escolhemos como método realizar 50 escolhas aleatórias distintas e, para cada uma, o cálculo da escala a partir da regressão apresentada. Finalmente, calculamos a média de todas as escalas obtidas.

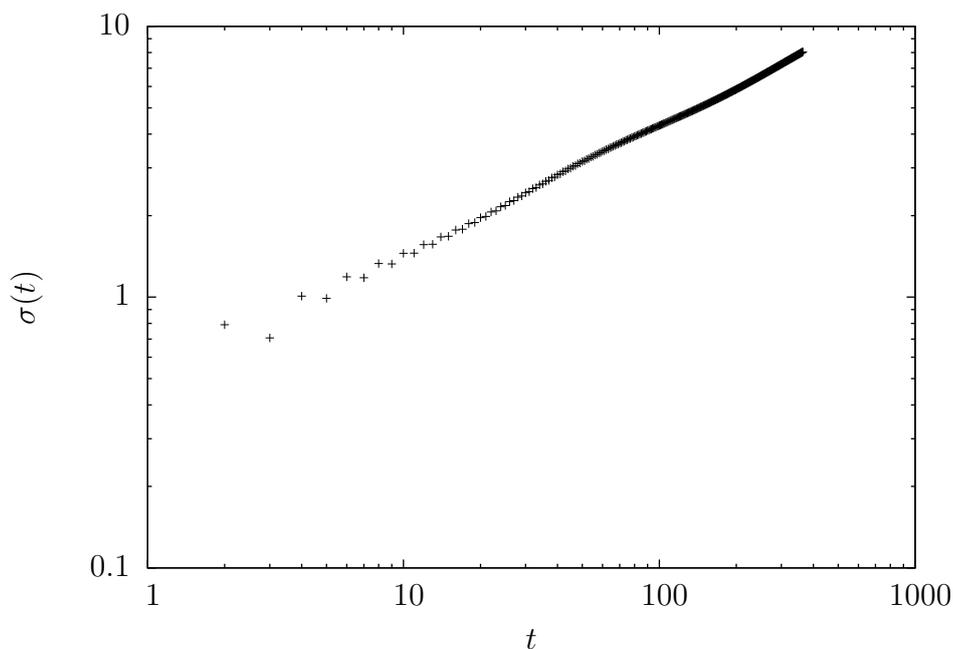


Figura 2.7: Gráfico em escala logarítmica da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński de geração $g = 6$ e condição inicial $i_0 = 0$.

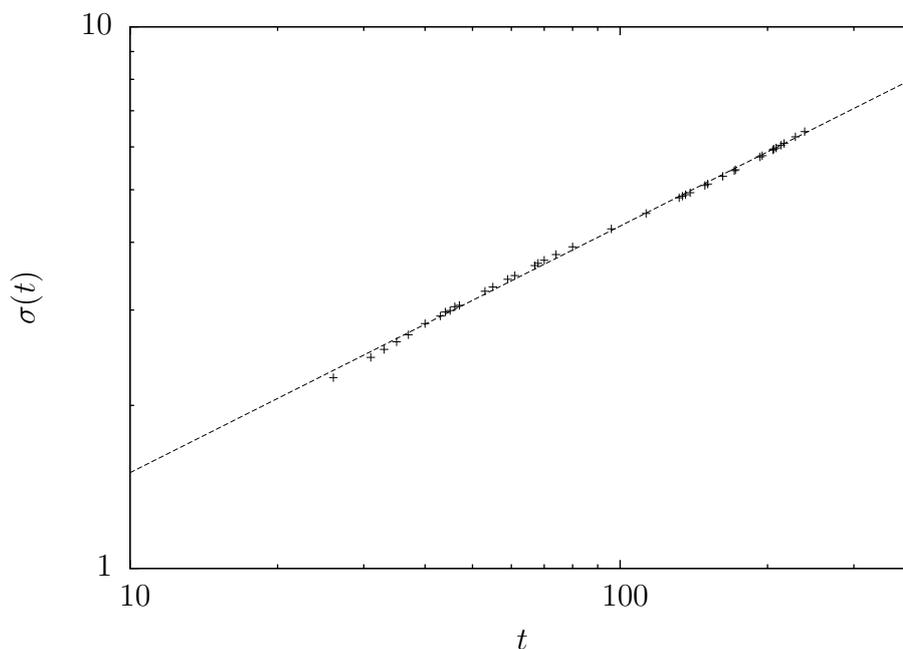


Figura 2.8: $\sigma(t)$ calculados para $g = 6$ e $i_0 = 0$.

2.2.3 Desvio padrão para diversas condições iniciais

Podemos agora calcular a escala do desvio padrão para todas as diversas condições iniciais e observar o comportamento da mesma relativo à posição no

tapete da respectiva condição inicial fornecida.

Ao calcular escalas partindo de todos os 8^6 pontos de um tapete de geração $g = 6$ obtivemos valores desde 0,3533789 (para $i_0 = 108937$) até 0,58192360 (para $i_0 = 213916$). A média das escalas de todos os pontos obtida foi de 0,474910. Aproveitamos para lançar uma conjectura neste trabalho de que o valor da média da escala do desvio padrão de um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński é dada por $\log 3 = 0,4771$, ou seja, que

$$\sigma(t) = at^{\log 3} \quad \text{com } a \in \mathbb{R}.$$

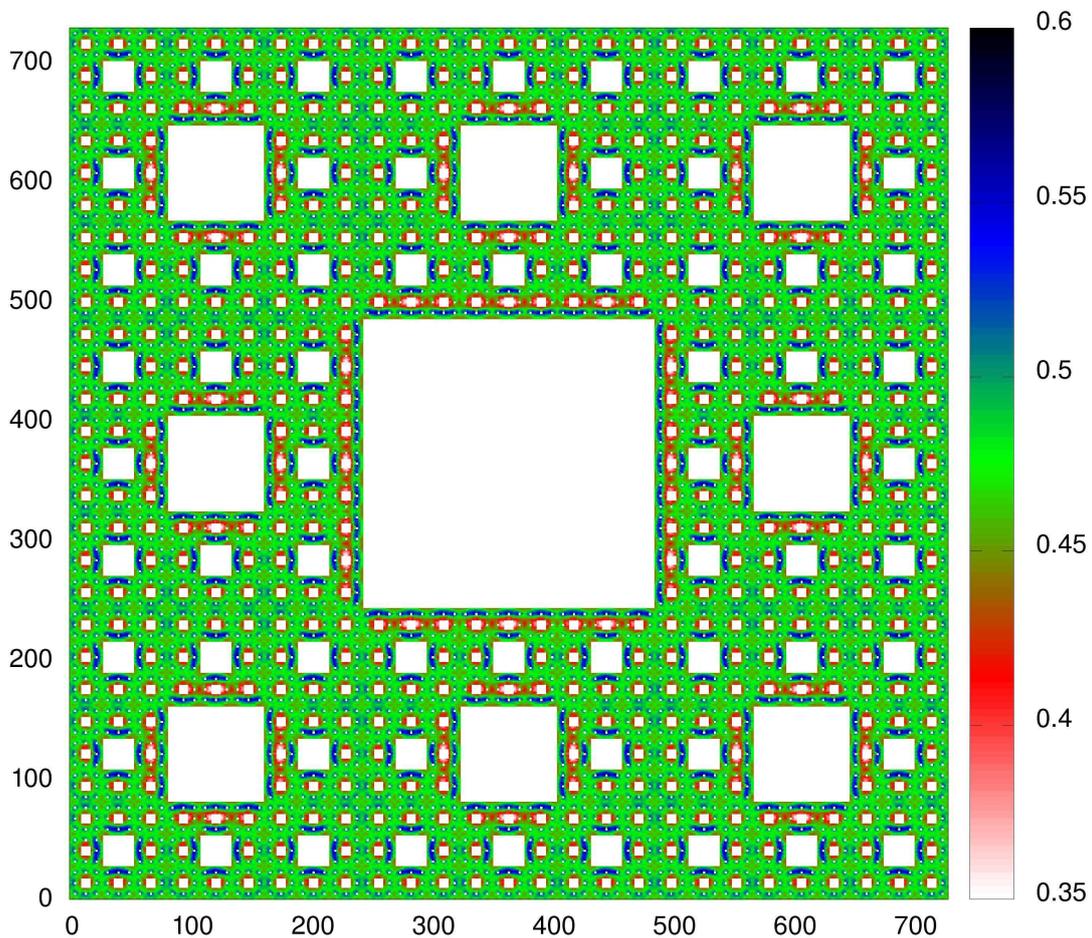


Figura 2.9: Escalas do desvio padrão para um passeio aleatório em um tapete de Sierpiński com $g = 6$.

A Figura 2.9 apresenta as escalas obtidas e suas respectivas posições das condições iniciais. Podemos perceber que de fato, a grande parte da figura se apre-

sentada com a cor verde, indo ao encontro da média encontrada. Podemos visualizar também o comportamento fractal percebendo que o padrão que é apresentado no tapete inteiro pode ser observado nas oito divisões menores.

Um valor similar já foi encontrado também a partir de simulação. Aarão Reis (1995, 1996) obteve a **dimensão do passeio aleatório** D_w para o tapete de 2, 101. Ele define esta medida de tal forma que a escala apresentada neste trabalho pode ser obtida calculando $1/D_w$, gerando um valor de 0,476.

2.3 Tempo de mistura

2.3.1 Definições

Para um passeio aleatório definido conforme a Equação 2.1, temos que a **distribuição de probabilidade limite** ou **distribuição estacionária** é dada por

$$\vec{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{s}(t). \quad (2.3)$$

Este valor existe é possível calculá-lo analiticamente. Seja π_i a probabilidade limite da partícula se encontrar na posição i . Neste caso,

$$\pi_i = \frac{\text{deg}(i)}{2m} \quad (2.4)$$

onde $\text{deg}(i)$ é o grau do vértice i e m a quantidade total de arestas do grafo (Fàbrega, 2011).

O **tempo de mistura** τ_ϵ (do inglês *mixing time*) de uma cadeia de Markov é definido como

$$\tau_\epsilon = \min \{T | \forall t \geq T, \|\vec{s}(t) - \vec{\pi}\|_\infty \leq \epsilon\}, \quad (2.5)$$

o que pode ser interpretado como sendo o menor número de passos para que a distância entre a distribuição de probabilidade e a distribuição limite se torna permanentemente menor que ϵ .

2.3.2 Obtenção do tempo de mistura

O tempo de mistura depende da condição inicial e da quantidade N de vértices do grafo. Utilizando a distribuição limite definida pela Equação 2.4 simulamos computacionalmente o passeio aleatório no tapete para alguns valores de ϵ fixados *a priori*.

Para $\epsilon = 1,06338 \times 10^{-6}$ variando a geração g do tapete obtivemos os pontos apresentados na Figura 2.10.

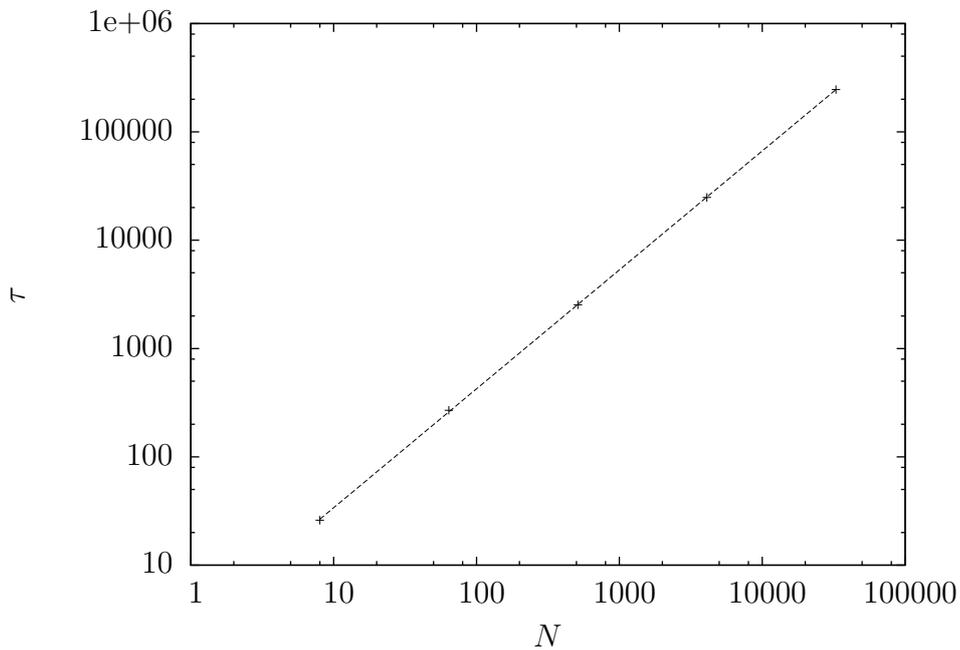


Figura 2.10: Gráfico em escala logarítmica do tempo de cobertura τ_ϵ com $\epsilon = 1,06338 \times 10^{-6}$ em função da quantidade de vértices N em tapetes de Sierpiński de diferentes gerações com condição inicial $i_0 = 0$.

Utilizando uma regressão para os pontos apresentados no gráfico da Figura 2.10 obtivemos o tempo de mistura como sendo

$$\tau_{\epsilon=1,06 \times 10^{-6}} = 2,70132678 \times N^{1,098147} \quad (2.6)$$

Definimos o tempo de mistura para um ϵ arbitrário como sendo da forma

$$\tau_\epsilon = a \times N^b \quad (2.7)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Através da realização de sucessivas regressões análogas à apresentada na Figura 2.10 para 52 valores de ϵ no intervalo $]10^{-10}, 10^{-6}[$ obtivemos valores para a e b . Alguns desses valores são exibidos na Tabela 2.3.

ϵ	a	b
$5,0706 \times 10^{-6}$	2,37848216902816	1,09854692082074
$6,33825 \times 10^{-6}$	2,36637094102074	1,09686531647923
$5,44452 \times 10^{-7}$	2,89852769911671	1,09554496511054
$6,80565 \times 10^{-7}$	2,8084906855827	1,09744334104621
$5,84601 \times 10^{-8}$	3,34887036406155	1,09609185804846
$5,02168 \times 10^{-9}$	3,89815273604617	1,09504548395881
$6,2771 \times 10^{-9}$	3,88579895036985	1,09394671410485
$5,39199 \times 10^{-10}$	4,43732983196307	1,09342247685184
$6,73999 \times 10^{-10}$	4,34562015022865	1,09462218789231

Tabela 2.3: Valores para a e b obtidos para diversos valores de ϵ utilizando regressão.

Ao analisar os valores obtidos pudemos perceber que b é invariante em relação a ϵ salvo um pequeno erro de aproximação do método utilizado. A média dos valores de b obtidos é dada por $\tilde{b} = 1,09537842139455$.

Para os valores obtidos de a realizamos outra regressão, desta vez de a em função de ϵ . A Figura 2.11 mostra o gráfico dos 52 pontos obtidos e a respectiva regressão.

Através desta regressão obtivemos $a = 0,220293 \times \log \frac{1}{\epsilon} - 0,292363$. Logo a expressão para o tempo de mistura para passeios aleatórios em tapetes de Sierpiński pode ser dada por

$$\tau_\epsilon = \left(0,220293 \log \frac{1}{\epsilon} - 0,292363 \right) N^{1,095378}. \quad (2.8)$$

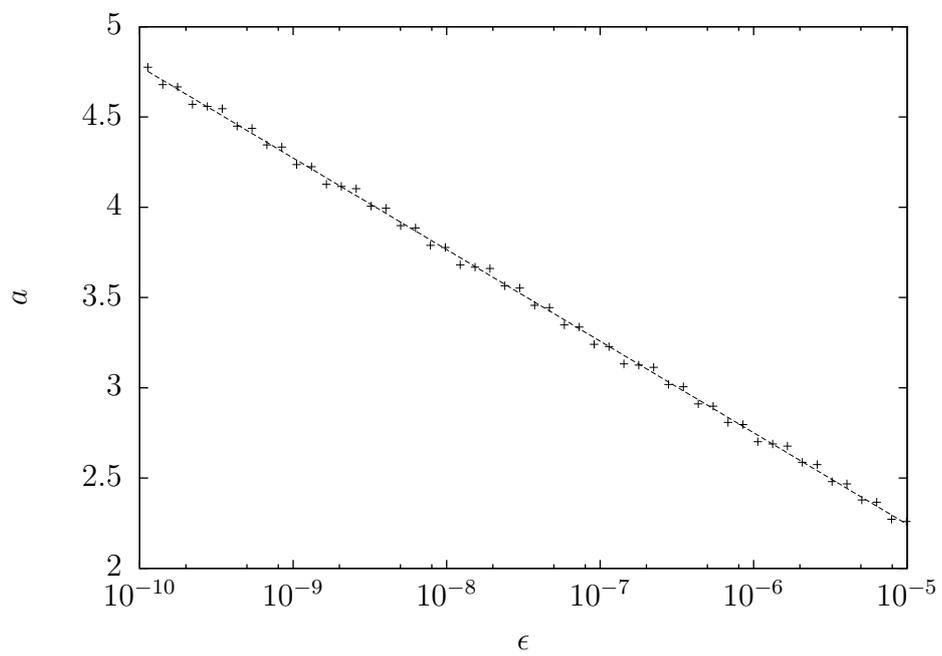


Figura 2.11: Gráfico semi-log do coeficiente a do tempo de mistura em função da precisão ϵ .

Capítulo 3

Passeio quântico em Tapetes de Sierpiński

Podemos definir um passeio quântico sobre o fractal, análogo ao que foi apresentado na Seção 1.3. Iremos, neste trabalho, obter o desvio padrão e o tempo de mistura para o passeio quântico a fim de compará-lo com o passeio aleatório clássico.

3.1 Simulação usando o software QWalk

O programa **QWalk** foi desenvolvido em C provendo uma interface para simulação de passeios quânticos em estruturas unidimensionais e bidimensionais. Neste trabalho utilizamos uma versão modificada da versão 1.4 do mesmo. O software e seu código fonte pode ser encontrado em <http://qubit.lncc.br/qwalk>.

Para as simulações no tapete iremos utilizar o módulo *qw2d* do *QWalk*, que realiza passeios quânticos em malhas de duas dimensões. O programa permite o rompimento de algumas das arestas da malha e automaticamente redistribui as probabilidades nos vértices afetados. Utilizamos esta técnica para definir a malha do Tapete de Sierpiński, conforme apresentada na Seção 1.6 (Marquezino e Portugal, 2008).

Foi desenvolvido, portanto, um programa em linguagem C++ para a geração dos arquivos de entrada do *QWalk*. Este, ao receber a geração desejada, ponto de partida e quantidade de passos, gera um arquivo **input** contendo a geração de uma

lattice bidimensional de tamanho compatível com o rompimento de determinadas arestas para se obter um tapete de Sierpiński.

Para fins de comparação com o caso clássico, incluindo o comportamento das condições de contorno utilizadas no passeio clássico definido no Capítulo 2, foi utilizada a malha cíclica do *QWalk* com a implementação da distância e do desvio padrão apresentadas na Seção 2.2. Essas alterações foram realizadas em módulos específicos do *QWalk* para este trabalho.

3.2 Análise do desvio padrão

Através da simulação, usando o *QWalk*, de um passeio quântico em um tapete de Sierpiński de geração $g = 7$ utilizando a moeda de Grover obtivemos os pontos apresentados na Figura 3.1.

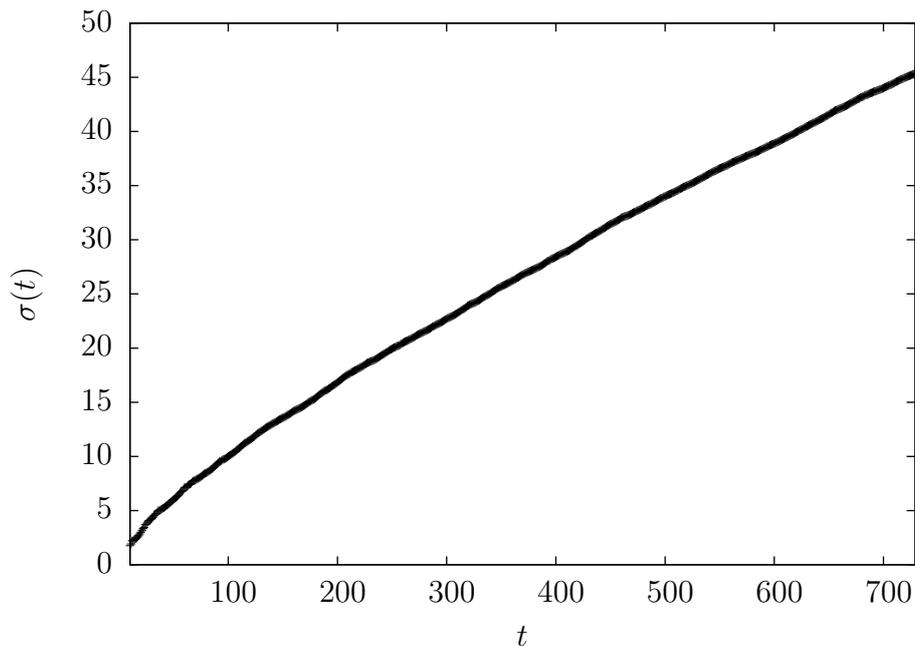


Figura 3.1: Gráfico da distribuição do desvio padrão $\sigma(t)$ em função da quantidade de passos t de um passeio quântico em um tapete de Sierpiński de geração $g = 7$ e condição inicial $i_0 = 0$.

Analogamente ao que foi feito para o passeio clássico, a fim de minimizar erros, escolhemos também 20 pontos aleatoriamente dentro de cada intervalo $[3^i, 3^{i+1}[$ com $3 \leq i \leq g - 2$ e descartamos os pontos iniciais. Finalmente, nós aplicamos o

método dos mínimos quadrados para realizar uma regressão desta função sobre os pontos. A Figura 3.2 mostra uma possível escolha dos pontos e sua respectiva $\sigma(t)$ obtida por regressão.

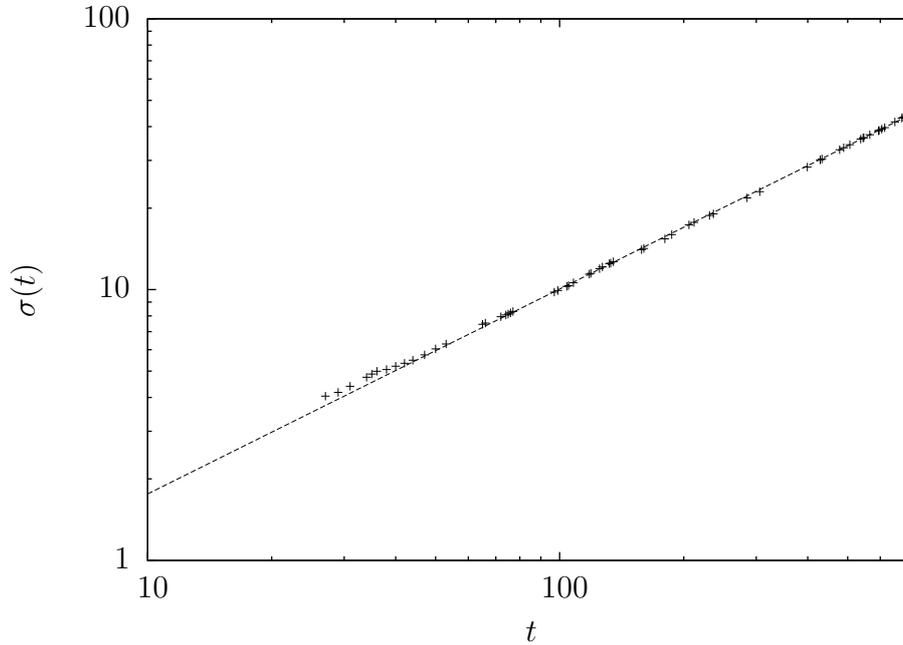


Figura 3.2: Gráfico do $\sigma(t)$ calculado para $g = 7$ e $i_0 = 0$.

Realizando esta escolha de pontos aleatórios 100 vezes, realizando a regressão para cada uma delas e, posteriormente, calculando a média dos valores obtidos, chegamos à seguinte expressão para o desvio padrão:

$$\sigma(t) = 0,309408 \times t^{0,75567478}. \quad (3.1)$$

Utilizando as mesmas condições para a moeda de Fourier, obtivemos um desvio padrão dado por

$$\sigma(t) = 0,271113 \times t^{0,78206713}. \quad (3.2)$$

Podemos perceber, portanto, que a influência da moeda na escala do desvio padrão não é muito significativa.

3.3 Análise do tempo de mistura

O software *QWalk* também calcula a distância entre a distribuição atual do passeio com a distribuição limite do mesmo. Com o objetivo de obter esta, o mesmo simula o passeio uma quantidade de passos suficientemente grande e usa a distribuição final como a distribuição limite. Com efeito, diferentemente do passeio aleatório clássico, a distribuição limite neste caso foi obtida de forma aproximada. Utilizando estes dados é possível calcular, portanto, o tempo de mistura do passeio conforme definido na Equação 2.5.

Utilizando, então, o *QWalk* para analisar o tempo de mistura de um passeio quântico num tapete de Sierpiński de geração 5 com a moeda de Grover, obtivemos os pontos apresentados na Figura 3.3.

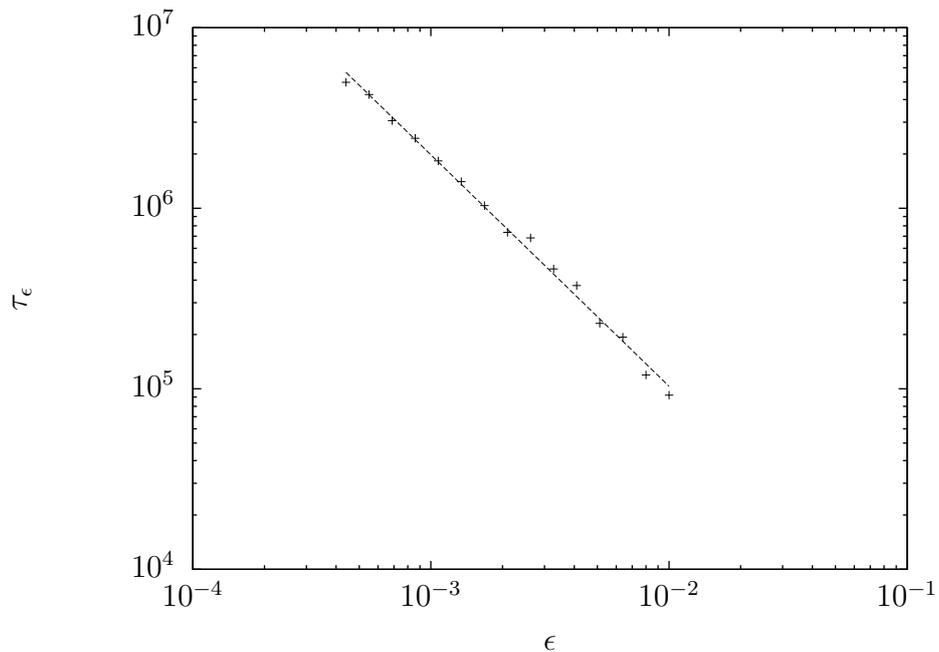


Figura 3.3: Gráfico do tempo de mistura τ_ϵ em função do erro desejado ϵ de um passeio quântico em um tapete de Sierpiński de geração $g = 5$ e condição inicial $i_0 = 0$.

Fixando ϵ e variando a geração do tapete, e conseqüentemente a quantidade de elementos na malha, obtivemos distribuições análogas à apresentada na Figura 3.4.

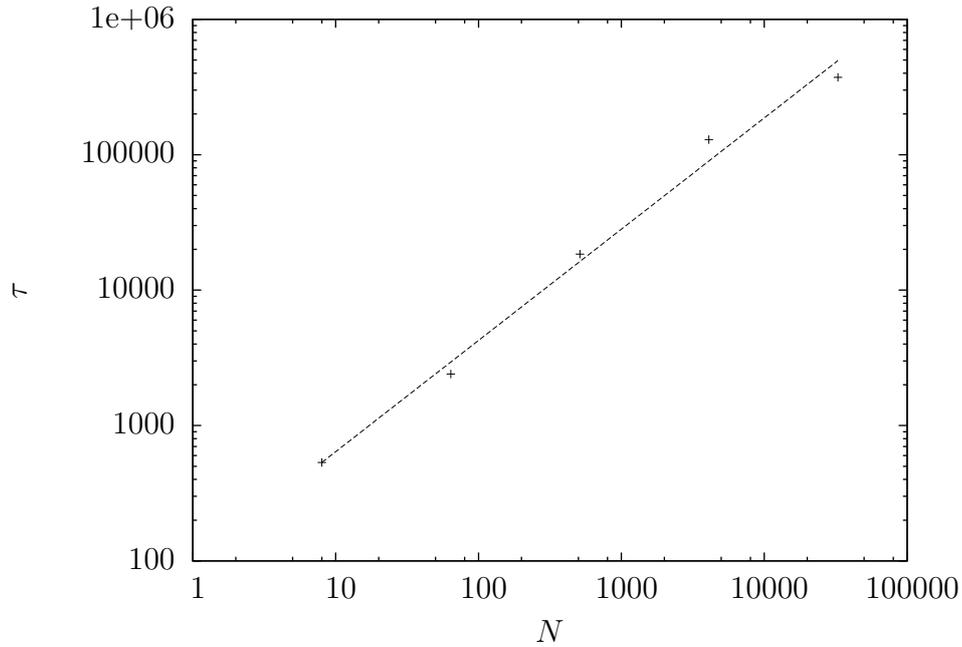


Figura 3.4: Gráfico do tempo de mistura τ_ϵ em função da quantidade de elementos N em um tapete de Sierpiński com $\epsilon = 0,004096$ e condição inicial $i_0 = 0$.

Através de regressões sobre essas distribuições obtidas, afirmamos que o tempo de mistura de um passeio quântico em um Tapete de Sierpiński com moeda de Grover pode ser dado pela expressão

$$\tau_\epsilon = a \times N^{0,811766}. \quad (3.3)$$

O valor de a foi calculado para diferentes valores de ϵ . Estes resultados são apresentados na Tabela 3.1.

ϵ	a
0,00262144	198,673415003328
0,0032768	139,052337669908
0,004096	102,768607759206
0,00512	70,1837802421081
0,0064	47,8979336446513
0,008	33,5627581474834
0,01	28,3923977845846

Tabela 3.1: Valores para a dado um ϵ fixo determinado.

Realizando mais uma regressão, agora sobre os valores da Tabela 3.1, obti-

vemos $a = \frac{0,0245}{\epsilon^{1,51134}}$. Logo, a expressão para o tempo de mistura de um passeio quântico neste fractal, utilizando-se da moeda de Grover, é dada por

$$\tau_\epsilon = \frac{0,0245}{\epsilon^{1,51134}} \times N^{0,811766}. \quad (3.4)$$

A Figura 3.5 apresenta esta última regressão realizada.

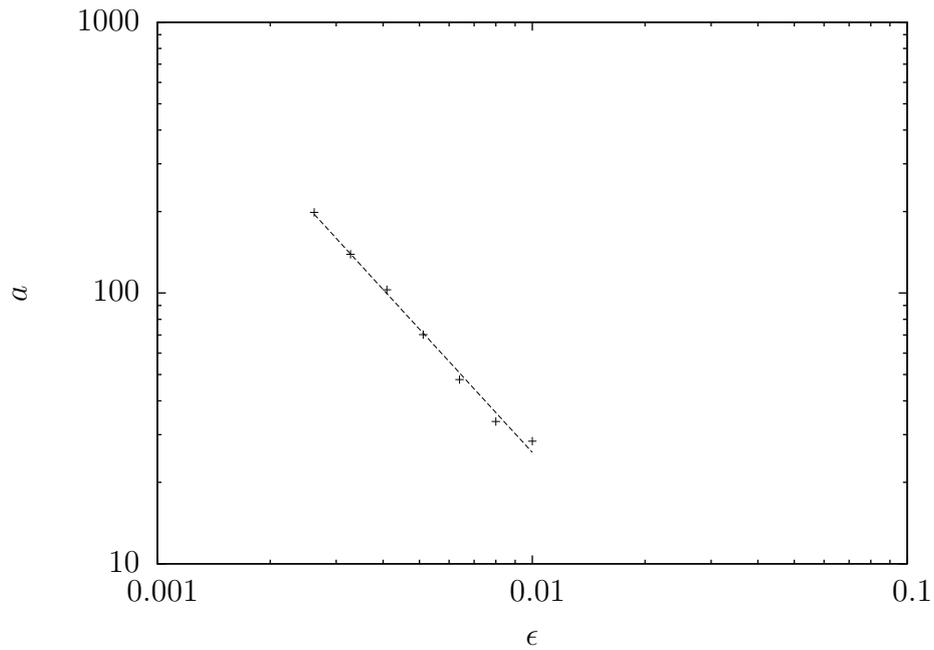


Figura 3.5: Gráfico dos valores de a obtidos para os respectivos ϵ .

Capítulo 4

Conclusões

4.1 Comparação entre passeio aleatório e quântico

Neste trabalho obtivemos, através de simulações, expressões para o desvio padrão e o tempo de mistura para ambos os passeios aleatório clássico e quântico. A Tabela 4.1 apresenta um resumo dos resultados apresentados.

Passeio	Desvio padrão	Tempo de mistura
clássico	$\sigma(t) = at^{0,4771}$	$\tau(N) = bN^{1,095378}$
quântico	$\sigma(t) = ct^{0,7557}$	$\tau(N) = dN^{0,811766}$

Tabela 4.1: Expressões para o desvio padrão e tempo de mistura obtidos.

Podemos ver que o espalhamento de um caminhante quântico em um tapete de Sierpiński se dá de forma mais rápida do que em um clássico. A escala do desvio padrão é maior e, como já se seria de esperar, o tempo de mistura é assintoticamente inferior.

Este resultado é análogo ao que é observado em outras malhas. Portugal (2013) apresenta estes mesmos resultados para outros grafos, como o ciclo unidimensional, a malha bidimensional, e o hipercubo. Para estes casos o passeio quântico obteve um tempo de mistura assintoticamente menor que do que o respectivo passeio clássico, conforme apresentado na Tabela 4.2.

O desvio padrão do passeio clássico em tapetes de Sierpiński já havia sido estudado por Aarão Reis (1995, 1996) e, através de um método totalmente independente do utilizado por ele, confirmamos este resultado. O tempo de mistura do

	Passeio Clássico	Passeio Quântico
Ciclo	$\tau(N) = O\left(N^2 \log \frac{1}{\epsilon}\right)$	$O\left(\frac{N \log N}{\epsilon}\right)$
Malha 2D	$\tau(N) = O\left(N \log \frac{1}{\epsilon}\right)$	$O\left(\frac{\sqrt{N \log N}}{\epsilon}\right)$
Hipercubo	$\tau(N) = O\left(\log N \log \frac{\log N}{\epsilon}\right)$	$O\left(\frac{\log N}{\epsilon}\right)$

Tabela 4.2: Expressões para o tempo de mistura de passeios clássicos e quânticos para outros grafos.

caso clássico e ambas as grandezas para o passeio quântico neste fractal são novas na literatura.

4.2 Software utilizado

Durante todo o desenrolar deste trabalho foram feitas inúmeras simulações e regressões a fim de se obter os resultados apresentados.

Para o passeio clássico, a dinâmica do mesmo foi implementada em um programa em *C*, utilizando a técnica apresentada na Subseção 2.2.1. Outros programas foram desenvolvidos para o cálculo do desvio padrão e da distância da distribuição limite. Esses dados foram tratados usando alguns *scripts* em *Bash*, *Perl* e *Awk* para gerar os pontos apresentados nos gráficos. Finalmente, tanto a geração destes gráficos, como as regressões por mínimos quadrados apresentadas foram realizadas utilizando o **GNUPlot** versão 4.6, software livre e gratuito.

O passeio quântico foi simulado utilizando-se o software **QWalk**¹. Este, apesar de não simular diretamente passeios no tapete de Sierpiński, possibilita que arestas sejam removidas de uma lattice regular. Portanto, foi desenvolvido um programa em *C++* para, dada a geração do tapete, gerar um arquivo de entrada para o *QWalk* e possibilitar a execução da simulação. Este já calcula o desvio padrão e a distância em relação à distribuição limite (aproximada). *Scripts* análogos ao caso clássico foram utilizados para a geração dos pontos desejados e o *GNUPlot* novamente gerou os gráficos e as regressões desejadas.

¹ Disponível em <http://qubit.lncc.br/qwalk>.

Para a geração gráfica da malha do tapete e simulação gráfica do passeio aleatório clássico nele foi desenvolvido um programa em *HTML 5* e *Javascript* chamado **RWSC**. Este gera a malha e permite a exportação da mesma para um arquivo PNG. Isto foi fundamental para algumas das ilustrações presentes neste trabalho. Além disso, permite a simulação de um passeio, controlado pelo usuário ou aleatório, pela malha gerada e a listagem dos respectivos vértices visitados utilizando a numeração apresentada na Subseção 2.2.1. Este software está disponível em <http://gaspar.ws/rwsc> e roda diretamente do navegador, sem precisar instalar ou realizar o download de nenhum arquivo adicional caso seu navegador suporte **HTML 5**. A Figura 4.1 mostra o *RWSC* em funcionamento.

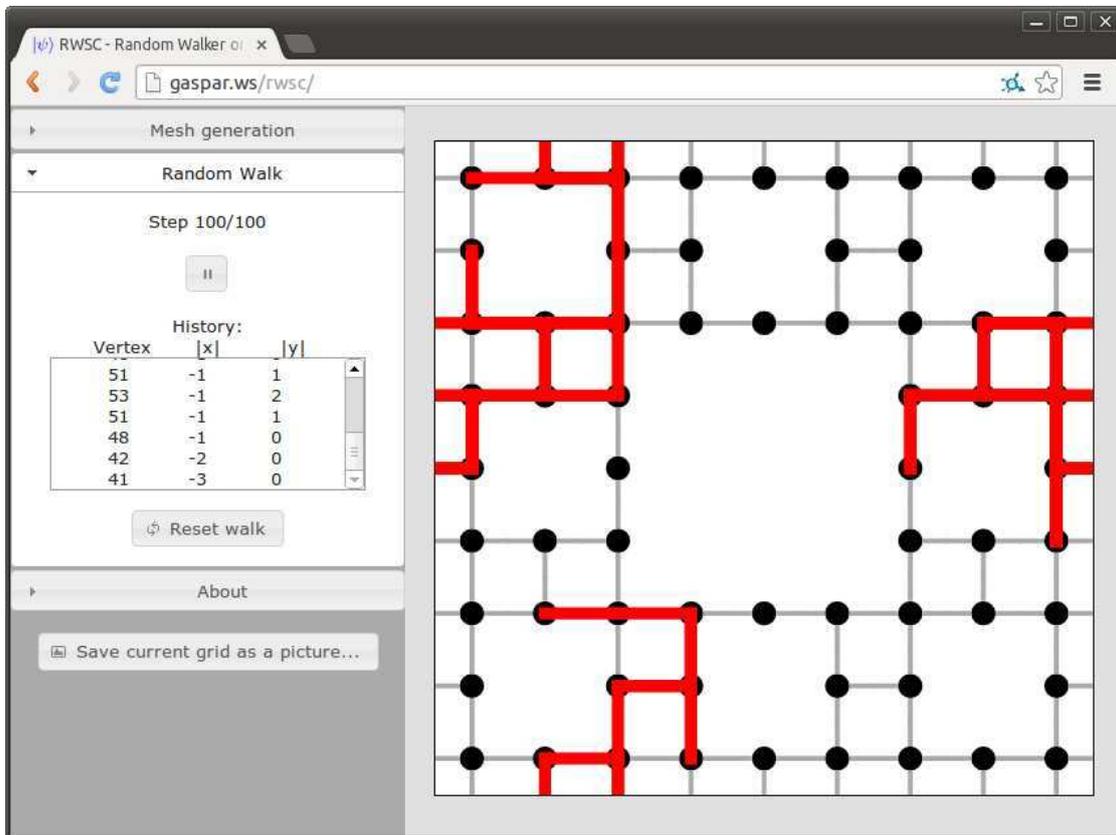


Figura 4.1: Imagem da tela do software *RWSC* sendo executado em uma janela do navegador *Google Chrome* para *Linux*.

Devido às características de desenvolvimento deste *WebApp*, o mesmo pode ser executado em diversos sistemas operacionais e arquiteturas, como PCs com *Windows*, *Linux*, *OS X* e telefones e *tablets* com *Android* e *iOS*.

4.3 Trabalhos futuros

Diversas lacunas ainda podem ser preenchidas relacionadas ao que foi apresentado neste trabalho. Inicialmente, não nos importamos com a constante a do desvio padrão do passeio clássico nos tapetes de Sierpiński. Este parâmetro, apesar de não ser tão interessante quanto a escala, pode ser calculado e uma expressão pode ser obtida para ele.

Além disso, o tempo de mistura do caso clássico e ambos o desvio padrão e o tempo de mistura do quântico foram obtidos para uma condição inicial específica. Estes variam conforme a escolha da mesma. Um estudo análogo ao que foi feito para o desvio padrão clássico, analisando o comportamento das grandezas para várias condições iniciais deve ser realizado.

Como a distribuição limite no caso quântico é obtida aproximadamente, é possível obtê-la com mais passos e para tapetes de gerações superiores. As grandezas do caso quântico, principalmente o tempo de mistura apresenta certo erro devido a essas aproximações. Com o desenvolvimento do *hardware* e desenvolvendo *software* com outros paradigmas, como computação massivamente paralela, será possível estudar o comportamento de sistemas maiores em um tempo razoável.

Durante todo este trabalho, utilizamos passeios definidos em tempo discreto, tanto clássico quanto quântico. É interessante estudar o comportamento dos mesmos em tempo contínuo para comparar com os resultados obtidos.

Finalmente, restringimos o tipo de Cadeia de Markov ao definir o passeio aleatório neste trabalho. Pode-se também estudar o comportamento de modelos baseados em Cadeias de Markov gerais sobre o grafo do tapete de Sierpiński.

Referências Bibliográficas

Fábio DA Aarão Reis. Finite-size scaling for random walks on fractals. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, 28(22):6277, 1995.

Fábio DA Aarão Reis. Scaling for random walks on sierpinski carpets. **Physics Letters A**, 214(5):239–242, 1996.

Elena Agliari, Alexander Blumen e Oliver Muelken. Quantum-walk approach to searching on fractal structures. **Physical Review A**, 82(1):012305, 2010.

Jean-Paul Allouche e Jeffrey Shallit. **Automatic sequences theory, applications, generalizations**. Cambridge University Press, Cambridge New York, 2003. ISBN 9780521823326.

Martin T Barlow e Richard F Bass. Transition densities for brownian motion on the sierpinski carpet. **Probability theory and related fields**, 91(3-4):307–330, 1992.

Martin T Barlow e Richard F Bass. Random walks on graphical sierpinski carpets. **Random walks and discrete potential theory**, ed. M. Picardello, W. Woess, CUP, 1999.

Manek Dubash. Moore’s Law is dead, says Gordon Moore, 2005. URL <http://news.techworld.com/operating-systems/3477/moores-law-is-dead-says-gordon-moore/>.

Josep Fàbrega. Random walks on graphs. Journées Combinatoire et Algorithmes du Littoral Méditerranéen, 2011.

- K. J. Falconer. **Fractal geometry : mathematical foundations and applications**. Wiley, Chichester New York, 1990. ISBN 0471922870.
- Jens Feder. **Fractals**. Plenum Press, New York, 1988. ISBN 0306428512.
- Richard P Feynman. Simulating physics with computers. **International journal of theoretical physics**, 21(6):467–488, 1982.
- Ray Kurzweil. The law of accelerating returns. In **Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker**, páginas 381–416. Springer, 2004.
- Pedro Carlos S Lara, Renato Portugal e Stefan Boettcher. Quantum walks on sierpinski gaskets. **International Journal of Quantum Information**, 2013.
- David Levin, Yuval Peres e Elizabeth L. Wilmer. **Markov chains and mixing times**. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2009. ISBN 9780821847398.
- Benoit Mandelbrot. **The fractal geometry of nature**. W.H. Freeman, San Francisco, 1982. ISBN 0716711869.
- Benoit Mandelbrot. Self-affine fractal sets, i: the basic fractal dimensions. In **Fractals in physics**, volume 1, página 3, 1986.
- Franklin de Lima Marquezino. **Análise, simulações e aplicações algorítmicas de caminhadas quânticas**. Doutor em ciências em modelagem computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), 2010.
- Franklin de Lima Marquezino e Renato Portugal. The qwalk simulator of quantum walks. **Computer Physics Communications**, 179(5):359–369, 2008.
- Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill e Duane C. Boes. **Introduction to the Theory of Statistics**. McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.
- Gordon E Moore et al. Cramming more components onto integrated circuits, 1965.

Michael A Nielsen e Isaac L Chuang. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge university press, 2010.

Renato Portugal. **Quantum walks and search algorithms**. Springer, New York, NY, 2013. ISBN 9781461463351.

Erwin Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, 23(49):823–828, 1935.

Wacław Sierpiński. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. **Comptes Rendus**, 629, 1916.

Claude Tricot. **Curves and fractal dimension**. Springer-Verlag, New York, 1995. ISBN 0387940952.