

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Curso de Doutorado em Modelagem Computacional

**JOGOS QUÂNTICOS A PARTIR DE HAMILTONIANOS BIOFÍSICOS E
UM CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO SUB-NEURONAL DA INFORMAÇÃO**

Jean Faber Ferreira de Abreu

Orientação

Prof. Dr. Renato Portugal, D.Sc.

Co-orientação

Prof. Dr. Luiz Pinguelli Rosa, D.Sc.

OUTUBRO DE 2005
PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

JOGOS QUÂNTICOS A PARTIR DE HAMILTONIANOS BIOFÍSICOS E
UM CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO SUB-NEURONAL DA INFORMAÇÃO

Jean Faber Ferreira de Abreu

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CORPO DOCENTE DA
COORDENAÇÃO DE FORMAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS DO
LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM MODELAGEM COMPUTACIONAL.

Aprovada por:

Renato Portugal, D.Sc.
Orientador

Luiz Pinguelli Rosa, D.Sc.
Co-orientador

Raul José Donângelo, Ph.D.

Ivan dos Santos Oliveira Júnior, Ph.D.

Luis Bevilacqua, Ph.D.

Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D.

Laurent Dardenne, Ph.D.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
OUTUBRO DE 2005

FABER, JEAN FERREIRA DE ABREU

Jogos Quânticos a partir de
Hamiltonianos Biofísicos e um Critério de
Otimização Sub-Neuronal da Informação
[Petrópolis] 2005

XV, 151p, 29,7cm (MCT/LNCC, D.
Sc., Modelagem Computacional, 2005)

Tese - Laboratório Nacional de
Computação Científica, LNCC.

1. Informação Quântica

I. MCT/LNCC II. Título (Série)

para minha mãe

Índice

Tabela de Conteúdo	vi
Lista de Figuras	vii
Agradecimentos	xi
Lista de Abreviações	xii
1 Introdução	1
2 Teoria de Jogos	6
2.1 Jogos Evolucionistas	10
2.2 Jogos Quânticos	12
2.2.1 Critério de Emaranhamento	15
2.2.2 Dilema do Prisioneiro	16
2.2.3 Contra-Propostas	18
3 Estratégias e Recompensas a partir de Hamiltonianos Biofísicos	22
3.1 Extensão das Estratégias Quânticas	24
3.1.1 Modelo Biofísico de Fröhlich	25
3.1.2 O Hamiltoniano de Fröhlich	26
3.2 Superoperadores no Modelo de Fröhlich	28
3.3 Um Critério de Recompensa: Matriz <i>Payoff</i>	32
4 O Sistema de Fröhlich como um Jogo Quântico	37
4.1 Canais de Comunicação como Jogos Quânticos	39
4.1.1 Abordagem	40
4.2 Jogos Quânticos Determinísticos (JQDs)	41
4.2.1 CQAA como um JQD	42
4.2.2 CQAF como um JQD	49
4.3 Jogos Quânticos Mistos (JQMs)	56
4.3.1 JQM - Modelo 1:	57
4.3.2 JQM - Modelo 2:	63

4.4	Sistemas Abertos Quânticos: Jogos Evolucionistas?	72
5	Modelos de Processamento e Otimização Sub-Neuronal de Informação	78
5.1	Microtúbulos	79
5.2	Modelos Biofísicos e Estoque de Informação nos Microtúbulos	81
5.3	Microtúbulos x Modelo Fröhlich	87
5.4	Microtúbulos x Funções Cerebrais	87
5.5	Condições Físicas para Construção de um Modelo Quântico de Otimização Sub-Neuronal da Informação	89
5.5.1	Condições: Taxas de Descoerência	90
5.5.2	Descoerência e Relaxação x Equilíbrio de Jogo	106
5.6	Conjecturas para Construção de um Modelo Sub-Neuronal Quântico	119
5.6.1	Síntese da Hipótese de um Critério de Processamento Evolucionista Sub-Neuronal da Informação	125
6	Conclusões e Perspectivas	127
A	Cálculo do Coeficiente $g(m,k)$	133
B	O Problema Cérebro-Mente	135
B.1	Modelo Quântico Cerebral de Penrose e Hameroff	137
B.1.1	Redução Objetiva Orquestrada como Computação Quântica	139
	Referências Bibliográficas	141

Lista de Figuras

2.1	Circuito quântico descrevendo o protocolo de jogo de J. Eisert <i>et al.</i>	15
2.2	Dilema do Prisioneiro Quântico e Clássico. De acordo com os valores de $\theta_{A,B}$ e $\phi_{A,B}$ nas estratégias o jogo entra num regime quântico ou clássico. Na figura 2.2(a) existe uma completa simetria; na figura 2.2(b) existem regiões de dominância; na figura 2.2(c) existe um completo equilíbrio de jogo.	19
3.1	Modelo mecânico de um conjunto de osciladores harmônicos acoplados. As molas representam o acoplamento entre cada sub-sistema.	26
3.2	Representação esquemática da interação entre sistema principal e ambiente no modelo de Fröhlich. Através do acoplamento de 2a. ordem pode surgir uma não-linearidade no suprimento de energia contribuindo para a sustentação da coerência quântica.	27
4.1	Representação do esquema de jogo proposto entre duas configurações diferentes do ambiente. Após atravessar dois canais, A e B , retribui-se positivamente à configuração ambiental que retirar menos informação do sistema principal representado pelo estado conjunto ρ_{AB}	38
4.2	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)$ para quatro valores de (λ_A, λ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(\pi/2) 00\rangle$	45
4.3	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)$ para quatro valores de (λ_A, λ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(9\pi/11) 00\rangle$	46

4.4	Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da intensidade do ruído λ_A . Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.	49
4.5	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (γ_A^*, γ_B^*) para quatro valores de (γ_A, γ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAFs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(\pi/2) 00\rangle$	53
4.6	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (γ_A^*, γ_B^*) para quatro valores de (γ_A, γ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(2\pi/11) 00\rangle$	54
4.7	Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da intensidade do ruído γ_A . Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.	55
4.8	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$ para quatro diferentes valores de (p, q) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(\pi/2) 00\rangle$	61
4.9	Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da probabilidade p de aplicação da estratégia. Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.	62
4.10	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$ para quatro valores de (p, q) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAGs são considerados como dois jogadores, A e B . Cada jogador aplica um CQET ou um CQEE com uma certa probabilidade, sujeito a uma certa intensidade de ruído λ . O grau de emaranhamento é dado por $ \psi_{in}'^{AB}\rangle = J(\pi/2)H \otimes H 00\rangle$	69
4.11	Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da probabilidade de aplicação de um CQEE ou de um CQET.	71
4.12	Representação da interpretação evolucionista da dinâmica de um jogo num sistema quântico.	76

5.1	Representação de um microtúbulo, uma tubulina (heterodímero: $\alpha\text{--}\beta$) e de um protofilamento.	79
5.2	Esquema das proteínas cinesina e dineína sobre um microtúbulo neuronal mostrando o transporte das vesículas neurotransmissoras. Esse transporte é realizado por um mecanismo de chaveamento que ocorre a partir da liberação de energia de uma ATP ou GTP. (http://cellbio.utmb.edu/cellbio/microtubule_structure.htm)	80
5.3	Potencial quártico que modela os níveis de conformação da tubulina.	82
5.4	Esquema representando as possíveis fases num modelo estatístico da distribuição do momento de dipólo das tubulinas sobre os microtúbulos.	83
5.5	Estoque de informação num microtúbulo em função da temperatura e polaridade.	86
5.6	Esquematisação da descrição de um microtúbulo como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados como no modelo de Fröhlich.	88
5.7	Esquema das coordenadas de uma tubulina num microtúbulo em relação a um ponto no ambiente.	94
5.8	Tempo de descoerência com regime de temperatura proporcional ao tempo de superposição.	97
5.9	Tempo de descoerência com regime de temperatura inversamente proporcional ao tempo de superposição.	97
5.10	Tempo de descoerência no modelo de Fröhlich em função da probabilidade de ruído γ contra o termo de acoplamento ξ , figura 5.10(a); a temperatura T , figura 5.10(b) e a frequência de oscilação do ambiente ν , figuras 5.10(c) e 5.10(d).	102
5.11	Tempo de relaxação no modelo de Fröhlich em função da probabilidade de ruído λ contra o termo de acoplamento η , figura 5.11(a); a temperatura T , figura 5.11(b) e a frequência de oscilação do ambiente μ , figuras 5.11(c) e 5.11(d).	105
5.12	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (T_A^*, T_B^*) para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente ν e do acoplamento ξ contra $(T_A, T_B) = (280, 280)$. Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.	111

5.13	Fixando-se $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ e variando-se (T_A, T_B) , as interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente ν e do acoplamento ξ . Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.	112
5.14	As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (T_A^*, T_B^*) para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente μ e do acoplamento η contra $(T_A, T_B) = (280, 280)$. Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento. .	116
5.15	Fixando-se $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ e variando-se (T_A, T_B) , as interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente μ e do acoplamento η . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.	118
5.16	Esquema hipotético de um modelo evolucionista representando as duas pressões seletivas presentes no sistema cérebro-mente-ambiente. A primeira pressão corresponderia a uma pressão sobre as estratégias quânticas e a segunda sobre as estratégias do indivíduo.	124
B.1	Representação da característica quântica e binária das tubulinas nas paredes dos microtúbulos neuronais (www.consciousness.arizona.edu/~hameroff). . .	139
B.2	Esquematização gráfica do período de sustentação da coerência quântica nos microtúbulos até o colapso da função de onda devido ao efeito gravitacional (www.consciousness.arizona.edu/~hameroff)	140

Agradecimentos

- Ao Prof. Renato Portugal pela paciência, pelo crédito e confiança depositados, pelo empenho e principalmente pela grande amizade criada durante esses anos de convivência.
- Ao Prof. Luiz Pinguelli Rosa pela confiança em minhas idéias, pelo imenso apoio, pela disponibilidade e prontidão, pela amizade e pelas formidáveis discussões.
- Ao Prof. Luis Alfredo Vidal de Carvalho pela prontidão, pela confiança depositada e pela grande amizade.
- Aos grandes companheiros de tese Márcio e Edson que tanto me ajudaram, não só com os problemas técnicos, mas também com grande incentivo, bom humor e amizade. E a todos os amigos do LNCC que de alguma forma, direta ou indiretamente, tornaram possível a realização desse trabalho. Com lembrança especial à Amanda e Ercília pela grande torcida final.
- Às secretárias Ana Paula, Ana Neri (LNCC) e Fátima (COPPE) que abriram todas as portas para viabilizar ao máximo a concretização dessa tese.
- Aos amigos-irmãos Sanderson, Binho (Fábio) e principalmente ao Helinho (Ítalo) pela imensa paciência e pelas divertidas discussões (filosóficas), fundamentais para a elaboração deste trabalho.
- À Xi (Ximene) pela paciência, carinho, incentivo e grande companheirismo durante todos esses anos de tese.
- À minha mãe pelo grande exemplo que é e por tudo que lutou e suportou por minhas conquistas. Às minhas irmãs Taly (Nataly) pelo apoio e incentivo e Paula pela paciência, pelo imenso apoio, incentivo e pelas conversas sobre Biologia.
- Ao LNCC pela confiança em meu trabalho.

Lista de Abreviações

- TJs: Teoria de Jogos
- JQs: Jogos Quânticos
- TJQs: Teoria de Jogos Quânticos
- DP: Dilema do Prisioneiro
- CQs: Canais Quânticos
- CQAA: Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude
- CQAAG: Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude Generalizado
- CQAF: Canal Quântico de Amortecimento de Fase
- CQAF: Canal Quântico de Troca de Fase
- CQET: Canal Quântico no Equilíbrio Térmico
- CQEE: Canal Quântico no Estado Excitado
- JQD: Jogo Quântico Determinístico
- JQM: Jogo Quântico Misto
- JD: Jogo Determinístico
- JM: Jogo Misto
- JEs: Jogos Evolucionistas
- TI: Teoria da Informação

- CQ: Computação Quântica
- OR: *Objective Reduction*
- Orch. OR: *Orchestred Objective Reduction*
- OQ: Operações Quânticas
- EN: Equilíbrio de Nash
- NP: Nash Pareto
- EEE: Estratégia Evolutivamente Estável
- TJE: Teoria de Jogos Evolucionistas
- MQ: Mecânica Quântica

Resumo da Tese apresentada ao MCT/LNCC como parte dos requisitos necessários para
obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

JOGOS QUÂNTICOS A PARTIR DE HAMILTONIANOS BIOFÍSICOS E UM CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO SUB-NEURONAL DA INFORMAÇÃO

Jean Faber Ferreira de Abreu

18 de abril de 2006

Orientador: Renato Portugal, D.Sc.

Luiz Pinguelli Rosa, D.Sc.

Programa: Modelagem Computacional

A Teoria de Jogos (TJs) é um formalismo matemático usado para analisar situações de conflitos entre duas ou mais partes. Nesses conflitos, cada parte possui um conjunto de ações (estratégias) que auxilia na otimização de seus objetivos. Os objetivos dos jogadores são as recompensas (*payoffs*) que cada um recebe de acordo com a estratégia adotada. Ao se quantizar um jogo, mostra-se ganhos em eficiência operacional e ganhos na estabilidade das soluções. Em um jogo quântico (JQ), as estratégias são operadores que atuam num sistema isolado. Uma questão natural é considerar um jogo num sistema aberto. Nesta situação as estratégias são trocadas por operadores de Kraus que representam uma medida natural do ambiente. Nosso interesse é encontrar as condições físicas necessárias para modelarmos um sistema quântico aberto como um jogo. Para analisar essa questão aplicamos o formalismo de Operações Quânticas (OQs) sobre o sistema de Fröhlich e o apresentamos como um modelo de JQ. A interpretação é um conflito entre diferentes configurações do ambiente que, ao inserirem ruído no sistema principal, exibem regiões de mínima perda de informação. O modelo de Fröhlich vem sendo usado para descrever a dinâmica biofísica dos microtúbulos neuronais. Ao estruturarmos o modelo de Fröhlich nos JQs, mostramos que as regiões de estabilidade podem existir sob condições fisiológicas. Usando o aspecto evolucionista, a TJs pode ser a chave para a descrição de processos naturais de otimização da informação em nível sub-neuronal.

Abstract of Thesis presented to MCT/LNCC as a partial fulfillment of the requirements for
the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

QUANTUM GAMES FROM BIOPHYSICAL HAMILTONIANS AND A
SUB-NEURONAL OPTIMIZATION CRITERION OF THE INFORMATION

Jean Faber Ferreira de Abreu

18 de abril de 2006

Advisors: Renato Portugal, D.Sc.

Luiz Pinguelli Rosa, D.Sc.

Program: Modelagem Computacional

The Theory of Games is a mathematical formalism used to analyze conflicts between two or more parts. In those conflicts, each part has a group of actions (strategies) that aids them in the optimization of their objectives. The objectives of the players are the rewards (payoffs) given according to their chosen strategy. By quantizing a game, advantages in operational efficiency and in the stability of the game solutions are demonstrated. In a quantum game, the strategies are operators that act on an isolated system. A natural issue is to consider a game in an open system. In this case the strategies are changed by Kraus operators which represent a natural measurement of the environment. We want to find the necessary physical conditions to model a quantum open system as a game. To analyze this issue we applied the formalism of Quantum Operations on the Fröhlich system and we described it as a model of Quantum Game. The interpretation is a conflict among different configurations of the environment which, by inserting noise in the main system exhibits regimes of minimum loss of information. On the other hand, the model of Fröhlich has been used to describe the biophysical dynamics of the neuronal microtubules. By describing the model of Fröhlich in the Quantum Game formalism, we have shown that regimes of stability may exist even under physiological conditions. From the evolutionary point of view, the Theory of Games can be the key to describe the natural optimization of information at sub-neuronal levels.

Capítulo 1

Introdução

Em 1944 J. von Neumann e O. Morgenstern publicaram um livro desenvolvendo os primeiros fundamentos e conceitos da Teoria de Jogos (TJs). Esta idéia inicial foi direcionada para a Economia [1]. Pouco mais tarde em 1950, J. Nash fez uma importante contribuição introduzindo uma solução de equilíbrio nas situações formalizadas pela TJs [2,3]. Já na década de setenta, M. Smith e G. R. Price, com algumas mudanças conceituais, aplicaram a TJs à situações de conflitos entre espécies num contexto biológico [4-6]. A generalidade matemática inerente à TJs, permitiu que diversas outras aplicações fossem formuladas, desde problemas em matemática pura, engenharia até em ciências humanas [7-12]. Essas aplicações mostram a eficiência e a maleabilidade da TJs, sugerindo algumas questões importantes:

Poderíamos aplicar a TJs a sistemas puramente físicos? Quais as condições para essa abordagem? Quais as vantagens? A TJs poderia ser uma ponte entre Darwinismo e sistemas físicos?

A TJs é um formalismo abstrato que descreve qualquer conflito entre duas ou mais partes. Cada parte possui um conjunto de ações visa maximizar seus interesses. Na TJs cada parte é identificada como um jogador, cada ação é identificada como uma estratégia e cada interesse é identificado como algum tipo de recompensa (*payoff*). A TJs é portanto um critério de

otimização de recursos e ações. Todo jogador quer aplicar a estratégia que lhe garanta a melhor recompensa. Encontrar situações onde uma única estratégia seja a melhor para um jogador ou um conjunto de estratégias que garanta a maximização na distribuição das recompensas a todos os jogadores é o grande desafio dentro de um jogo. Essas situações correspondem a pontos de equilíbrio que, quando contextualizados, descrevem situações de domínio ou de cooperação entre jogadores. Esses pontos são de fundamental importância em qualquer sistema analisado.

Recentes trabalhos vêm propondo métodos de quantização de um jogo [13-18]. Esses trabalhos ligam a Teoria de Informação (TI) e Computação Quântica (CQ) com a TJs criando a Teoria de Jogos Quânticos (TJQs). Existem inúmeras razões para se querer quantizar um jogo. O simples fato da TJs poder ser escrita numa forma probabilística já instiga a generalização para o mundo quântico. Além disso, como a TJs é um método de otimização, aplicando-a à computação quântica pode-se derivar novos meios de construção de algoritmos mais eficientes. Ao se quantizar um jogo cria-se um vínculo físico inerente ao formalismo teórico. Assim, a TJs pode ser um método extremamente útil e eficiente na descrição de processos micro e nanométricos presentes na natureza. Sistemas de nano escala são os primeiros a apresentar interesse de investigação dada a complexidade de suas sub-unidades. Contudo a razão mais direta para se querer quantizar um jogo é a demonstração de novos pontos de estabilidade e o ganho em eficiência computacional. Essa eficiência gera uma economia de tempo e de recursos físicos [19,20], requisitos cruciais para a construção e elaboração de qualquer processo de otimização (tecnológico ou natural).

Na TJQs padrão [13] as estratégias são representadas por operadores unitários que atuam sobre estados quânticos que representam o arranjo inicial do jogo. Portanto, o sistema físico num jogo é um sistema isolado do meio ambiente. Entretanto, nenhum sistema na natureza é de fato isolado. Logo, se quisermos uma ligação entre TJs e algum sistema

natural precisamos considerar as interferências do ambiente. Em sistemas quânticos essas interferências representam ruídos que destroem a coerência do sistema. Assim, a construção de qualquer tecnologia baseada em recursos quânticos deve, antes de mais nada, compreender e controlar esses ruídos. E por outro lado, a descrição de qualquer dinâmica natural física deve considerar esses ruídos no sistema para avaliar a relevância e a sustentabilidade dos efeitos quânticos nesses sistemas.

A extensão de jogos quânticos considerando também como estratégias operadores de medida, foi descrita inicialmente por J. Eisert e M. Wilkens [13,16]. Nessa extensão, a medida realizada por cada jogador sobre o estado inicial do jogo expressa o não-isolamento do sistema. Contudo, nosso interesse é a modelagem de sistemas abertos quânticos a partir da TJQs. Dado um sistema físico, queremos saber quais os vínculos entre a física do sistema e a TJQs; quais os critérios necessários para essa descrição, quais as restrições, vantagens e desvantagens.

Para fazer o estudo da relação entre TJQs e sistemas abertos quânticos escolhemos o sistema de Fröhlich. Herbert Fröhlich desenvolveu um modelo teórico de sistemas biológicos enfocando algumas das propriedades físicas mais importantes desses sistemas. Aproximando esses bio-sistemas por osciladores harmônicos acoplados com o ambiente, seu modelo mostra que, para um suprimento adequado de energia é possível haver efeitos quânticos relevantes em condições fisiológicas [21-29]. Apesar de ser um modelo teórico, o modelo de Fröhlich apresenta propriedades que são fundamentais em qualquer sistema físico (quântico ou clássico). Em seu modelo aparece explicitamente os vínculos mais relevantes entre o sistema principal (bio-sistema) e o ambiente (fonte de calor mais banho térmico). Assim, aplicando o formalismo de Operações Quânticas (OQs) [30-37] é possível escrever os acoplamentos do sistema principal com o ambiente num formato de tempo discreto. Esse formato é extremamente importante para qualquer caracterização computacional. Além disso, permite o estudo de

ruídos quânticos existentes em sistemas abertos através da Teoria de Informação Quântica. Nesse formato, a informação física de um sistema quântico é perturbada por ruídos ao atravessar um canal de comunicação [30,31]. Fisicamente analisaremos a perturbação do sistema por duas configurações distintas do ambiente. Essas duas configurações ambientais serão interpretadas na TJs como dois jogadores, onde as estratégias serão operadores de medida derivados do tipo de acoplamento realizado com o sistema principal. Com um critério de recompensa que mede a informação contida no sistema principal após ter passado por um canal quântico (CQ), construiremos a ponte entre sistemas quânticos abertos, TI e TJs.

Modelando um sistema biofísico de Fröhlich através da TJQs, analisaremos a relação entre as condições físicas necessárias para a emergência e sustentação de efeitos quânticos a partir das soluções de jogo. Com isso, mostramos um possível critério de otimização ao qual a natureza pode usar. Além disso, o modelo de Fröhlich tem ganhado bastante interesse por apresentar características muito próximas das propriedades físicas dos microtúbulos celulares. Pesquisas teóricas vêm propondo a existência de efeitos quânticos nesses bio-sistemas que realizariam um processamento quântico de informação sub-neuronal. Esse processamento seria responsável pela emergência de funções cerebrais mais complexas [38-58]. Algumas pesquisas experimentais mostram boas perspectivas nessa direção [59,60]. Contudo, o quadro geral ainda é pendente por confirmação. Mesmo as dinâmicas e relações biofísicas dos microtúbulos com a célula ainda não são totalmente conhecidas [61-68]. Uma formulação a partir da TJs pode ajudar a análise física e o entendimento da estabilidade desses sistemas. Através de um modelo de jogo para um sistema aberto, como o de Fröhlich, podemos propor um critério de otimização natural em nível sub-neuronal [69-80]. Esse critério poderia ser a chave para a ligação das hipóteses quânticas e um processamento de informação estável em sistemas biológicos.

A primeira etapa dessa abordagem será a apresentação das definições e conceitos básicos da TJs e TJQs. A segunda será a caracterização de um sistema aberto quântico segundo o formalismo de OQs. Nessa etapa consideraremos o Hamiltoniano do modelo de Fröhlich onde analisaremos cada acoplamento com o ambiente separadamente. Com essa caracterização identificaremos o conjunto de estratégias quânticas como operadores de medida derivados de cada tipo de acoplamento. Identificado as estratégias, construiremos um critério de recompensa baseado na informação mantida no sistema principal após interação com o ambiente. A partir desse critério será possível a caracterização natural de um jogo em um sistema físico. A terceira etapa será então o cálculo e análise das soluções dos modelos de jogos. Essas soluções permitirão avaliar as condições de estabilidade física e os pontos de mínima perda de informação no modelo de Fröhlich. Finalmente, na quarta etapa, faremos uma ponte entre as hipóteses quânticas nos microtúbulos e o modelo de Fröhlich. Com a TJQs calculamos e avaliamos os pontos de estabilidade física do jogo para temperaturas próximas à do corpo humano. Além disso, relacionamos essas condições físicas com as taxas de coerência quântica e de amortecimento de amplitude.

Para finalizar, apresentamos uma interpretação alternativa dos modelos de jogos quânticos estudados baseada na teoria evolucionista. Essa “nova interpretação” pode representar a chave para a descrição de um processo de seleção natural em nível quântico. Além disso, a partir dessa interpretação Darwinista expomos alguns critérios teóricos para a construção de um modelo quântico de otimização e processamento de informação em nível sub-neuronal.

Capítulo 2

Teoria de Jogos

Teoria de Jogos (TJs) é um formalismo usado para analisar quaisquer situações de conflito, entre duas ou mais partes. As partes podem cooperar ou não de forma a maximizar seus interesses. As partes de um jogo são chamadas de *jogadores*. Os conceitos mais importantes dentro da TG são: *estratégia* e *payoff* (recompensa) [4,6].

- Estratégia é um plano de ação que um jogador realiza quando exposto a alguma situação de decisão. As estratégias podem ser classificadas como *puras* ou *mistas*.

- ★ Uma estratégia será pura quando um jogador tomar a mesma decisão sempre que se deparar com uma dada situação.

- ★ Uma estratégia será mista quando um jogador tomar decisões diferentes, com probabilidades diferentes, numa dada situação. Neste sentido, uma estratégia mista é uma combinação de estratégias puras onde cada estratégia é escolhida probabilisticamente.

- *Payoff* (recompensa) é o que o jogador recebe depois de ter adotado uma certa estratégia. Esta recompensa pode ser positiva (ganho, incentivo) ou negativa (perda,

punição). Normalmente as recompensas são dispostas numa matriz chamada de *matriz payoff*. Este é o conceito mais importante e mais arbitrário dentro da TJs. Um jogo é essencialmente definido pela construção da matriz *payoff*.

Para medirmos o desempenho médio de um jogador num certo jogo define-se ainda a *função de avaliação ou função payoff*. Esta função avalia todas as possibilidades de jogadas de um jogador e o quanto esse jogador recebe para cada uma dessas possibilidades [6].

A TJs é um formalismo abstrato, desta forma não há qualquer especificação dos objetos físicos envolvidos em cada jogo. Entretanto, mesmo nas situações mais abstratas, é sempre possível idealizar um contexto onde haja inerentemente a necessidade de algum objeto ou meio físico para o desenrolar do jogo¹.

Um jogo pode ser classificado de acordo com as ações dos jogadores, ou de acordo com a construção da matriz *payoff* [11,33,81].

- ★ Jogo Estático: todos os jogadores escolhem e jogam suas estratégias simultaneamente;

- ★ Jogo Dinâmico: todos os jogadores escolhem e jogam sequencialmente suas estratégias. Ou quando houver alguma relação temporal entre as jogadas dos jogadores;

- ★ Jogo de Informação Completa: quando os jogadores conhecem todas as estratégias de seus oponentes e as recompensas associadas a cada estratégia. Quando esses critérios não são satisfeitos o jogo é chamado de Jogo de Informação Incompleta.

- ★ Jogo Cooperativo: quando, de comum acordo, existe alguma transferência de informação entre os jogadores. Do contrário o jogo é chamado de Jogo não-Cooperativo.

- ★ Jogo Simétrico: quando os jogadores recebem a mesma recompensa para uma mesma estratégia jogada. Do contrário o jogo é chamado de Jogo Assimétrico.

¹Uma estratégia pode ser desde uma expressão fisionômica (sorrir, chorar,...), uma expressão corporal brusca (bater, fugir,...) ou simplesmente jogar um “coringa” ao invés de um “rei” num jogo de cartas.

★ Jogo de Soma-Zero: quando o valor do ganho de um jogador é exatamente igual ao valor da perda de seu adversário.

★ Jogo Bi-Matriz: onde cada jogador possui uma matriz *payoff* própria. Para um jogo de dois jogadores, A e B , o jogo será simétrico quando a matriz *payoff* de A for simétrica à matriz *payoff* de B , caso contrário o jogo é dito assimétrico.

Formalmente, um jogo pode ser definido por um conjunto $\Omega = \{N, \mathcal{S}_i, \mathcal{F}_i\}$, onde N é o número de jogadores, $\mathcal{S}_i = (s_1, \dots, s_n)_i$ é o conjunto finito de n estratégias puras do i -ésimo jogador e \mathcal{F}_i é a função de avaliação do i -ésimo jogador. Num jogo misto associamos cada estratégia pura s_j , do i -ésimo jogador, a uma probabilidade p_j^i (com $p_j^i \in [0, 1]$, $\forall i, j$). Para um jogo misto, onde o conjunto de estratégias de cada jogador é identico ($\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_k, \forall i, k \Rightarrow p_j^i = p_j^k, \forall i, j, k$), a função de avaliação do i -ésimo jogador será [6]:

$$\mathcal{F}_i(p_1, \dots, p_n) = \sum_{l, \dots, m} p_l^1 \dots p_m^N w_{l, \dots, m}^i, \quad (2.1)$$

onde $(p_1^i, \dots, p_n^i) \equiv \mathbf{p}^i$ é o vetor das probabilidades das estratégias (s_1, \dots, s_n) e $w_{l, \dots, m}^i$ são os coeficientes da matriz *payoff* do i -ésimo jogador. Esses coeficientes representam as recompensas dadas a cada disputa entre estratégias.

A representação matricial de um jogo com dois jogadores ($N = 2$), A e B , com n estratégias pode ser escrita como

$$\begin{array}{c} B : s_1 \quad \dots \quad B : s_n \\ \\ A : s^1 \quad \left(\begin{array}{ccc} (w_{11}^A, w_{11}^B) & \dots & (w_{1n}^A, w_{1n}^B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_{n1}^A, w_{n1}^B) & \dots & (w_{nn}^A, w_{nn}^B) \end{array} \right) \\ \\ A : s_n \end{array} \equiv \mathbf{W}_{A,B}. \quad (2.2)$$

Esta é uma representação bi-matriz onde o primeiro termo de cada parênteses é a recompensa dada ao jogador A e o segundo termo é a recompensa dada ao jogador B . Com $N = 2$

podemos reescrever (2.1) na forma compacta [6]:

$$\mathcal{F}_A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{W}_A \mathbf{q} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}_B(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{W}_B \mathbf{p}$$

onde $\mathbf{p} = \mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^A$ é o vetor probabilidade associado ao jogador A e $\mathbf{q} = \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^B$ ao jogador B . \mathbf{W}_A é a matriz *payoff* associada ao jogador A e \mathbf{W}_B é a matriz *payoff* associada ao jogador B . No entanto, somente a definição de um jogo através da matriz *payoff* não é o suficiente. Para analisarmos as melhores estratégias, frente às recompensas, é necessário estudarmos as soluções deste jogo.

As soluções de um jogo correspondem à análise de pontos de equilíbrio e domínio das estratégias. Esses pontos são determinados de acordo com os valores da matriz *payoff* associados a cada par de estratégia. Os conceitos mais importantes, na análise da solução de um jogo, são:

- Estratégia Dominante (ED): é aquela que possui a melhor performance num jogo em relação à todas as outras estratégias. Não necessariamente é a que fornece a melhor recompensa para o jogador. Na verdade, se todos os jogadores adotarem suas EDs não há qualquer garantia de que todos receberão a melhor recompensa. Esta é uma análise inteiramente individual que oferece as maiores recompensas que você receberia caso seguisse qualquer outra estratégia contra qualquer estratégia do seu oponente

De um jogo misto, definido por (2.2), dizemos que a estratégia \mathbf{p}^* , do i -ésimo jogador², é uma ED quando [4]

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) - \mathcal{F}_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}^* - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{W}_i \mathbf{q} \geq 0, \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \quad (2.4)$$

Quando a desigualdade é estritamente maior que zero, dizemos que a estratégia é *estritamente dominante*.

²Explicitamente seria um conjunto de estratégias (s_1^*, \dots, s_n^*) associado ao vetor \mathbf{p}^* .

- Equilíbrio de Nash (EN): é o conjunto de estratégias que fornece as melhores recompensas possíveis a todos os jogadores simultaneamente. Uma vez adotado pelo grupo, nenhum jogador pode melhorar sua recompensa mudando unilateralmente suas estratégias. Este é um conceito de análise global de jogo.

De (2.2), dizemos que um par de estratégias $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ estão num EN se satisfaz as desigualdades simultaneamente

$$\begin{cases} \mathcal{F}_A(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) - \mathcal{F}_A(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = (\mathbf{p}^* - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{W}_A \mathbf{q}^* \geq 0, \quad \forall \mathbf{p}; \\ \mathcal{F}_B(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) - \mathcal{F}_B(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{W}_B (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{q}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nash provou que todo jogo misto possui no mínimo um ponto de EN [2,3]. Uma extensão do EN é o conceito de *Nash-Pareto* (NP) ou *Pareto eficiente*. Um par $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ será um NP quando for impossível para todos os jogadores melhorar suas recompensas mudando suas estratégias simultaneamente. Portanto, um ponto em EN não é necessariamente um NP. Além disso, uma solução está *estritamente* num EN quando as desigualdades de (2.5) forem estritamente maiores que zero.

2.1 Jogos Evolucionistas

De acordo com o Darwinismo em qualquer sistema biológico existe inerentemente uma disputa pela vida entre indivíduos de uma população e seu meio ambiente [4-7,11,12]. Os indivíduos podem ser de espécies (como dinossauros, homens, peixes...) a genes; já o ambiente pode ser intempéries físicos (temperatura, pressão, umidade...), outros indivíduos da mesma espécie (disputando fêmea, comida, liderança,...) ou ainda indivíduos de espécies diferentes (como predadores). No entanto, desses conflitos aparecem aglomerados extremamente estáveis, grupos de indivíduos que cooperam mesmo tendo interesses próprios. A natureza mostra que o processo evolutivo é um grande otimizador. Essa otimização introduz

inerentemente situações de equilíbrio que vizam a manutenção da organização do grupo. M. Smith e G. R. Price perceberam que o conflito Darwinista não é diferente de nenhum outro conflito e, portanto, pode ser descrito pela TJs. Essa descrição é conhecida por Teoria de Jogos Evolucionista (TJE).

Uma importante diferença na TJE é que os jogadores são interpretados como indivíduos “irracionais” dentro de uma população. Assim, suas estratégias correspondem a uma propriedade inerente que expressa um comportamento fenotípico frente as exigências do meio ambiente. Essa consideração expressa o controle do ambiente sobre os indivíduos já que a adaptação dos indivíduos é uma consequência direta dessas exigências. Deste modo, os indivíduos são mais (ou menos) recompensados se suas estratégias prolongam mais (ou menos) suas chances de sobrevivência. No contexto biológico a *aptidão* (*fitness*) do indivíduo é a expressão de toda a desenvoltura desse indivíduo num dado ambiente. E as exigências ambientais são descritas através da matriz payoff. Portanto, na TJE a *função payoff* é chamada de *aptidão*³[4].

A partir dessa descrição M. Smith e G. R. Price mostraram que há um outro tipo de solução de jogo: as Estratégias Evolutivamente Estáveis (EEEs).

- Estratégia Evolutivamente Estável (EEE): é aquela que quando adotada pela maioria dos indivíduos de uma população, qualquer estratégia alternativa que tentar invadir essa população será punida por seleção natural.

Formalmente, considere uma população constituída basicamente por indivíduos do tipo A que adotam uma estratégia \mathbf{p}^* e um pequeno grupo de indivíduos do tipo B que adotam uma estratégia \mathbf{q} . A probabilidade de encontrarmos um indivíduo jogando uma estratégia \mathbf{p}^* é $(1 - \varepsilon)$ e uma estratégia \mathbf{q} é ε , onde $\varepsilon \ll 1$. Portanto, podemos dizer que a população, como um todo, joga uma estratégia mista $\varepsilon\mathbf{q} + (1 - \varepsilon)\mathbf{p}^*$. Assim, uma estratégia \mathbf{p}^* será EEE numa

³Durante todo o texto usaremos o termo *aptidão* para designar a *função de avaliação* ou *função payoff*.

população quando, para uma pequena possibilidade de aparecer uma estratégia mutante \mathbf{q} , gerar a maior recompensa, isto é:

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}^*, \varepsilon \mathbf{q} + (1 - \varepsilon) \mathbf{p}^*) > \mathcal{F}(\mathbf{q}, \varepsilon \mathbf{q} + (1 - \varepsilon) \mathbf{p}^*), \quad (2.6)$$

onde consideramos $\mathcal{F}_A \equiv \mathcal{F}_B \equiv \mathcal{F}$. Além disso, como $\varepsilon \ll 1$, \mathbf{p}^* será EEE se e somente se satisfizer, $\forall \mathbf{q} \neq \mathbf{p}^*$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - \mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}^*) \geq 0, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) = \mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}^*), \implies \mathcal{F}(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) - \mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0.$$

A primeira condição é nada mais do que o EN. Portanto, o conceito de EEE impõe uma restrição a mais no EN. Assim, é fácil ver que uma estratégia *estritamente* num EN implica em EEE e vice versa.

2.2 Jogos Quânticos

Com o desenvolvimento da Computação Quântica e, mais genericamente, da Teoria Quântica da Informação, diversos ramos da física vem sendo estudados sob essa nova formulação (algoritmos, criptografia, random walk,...) [82-90]. Nessa direção, a TJs, usando a linguagem informacional e computacional, também se expande considerando efeitos quânticos nas situações de jogo.

Muitos trabalhos estão extendendo os conceitos da TJs para o mundo quântico [13-20, 69-71, 91-102]. Estas extensões estão mostrando uma maior eficiência dos jogos quânticos e uma generalização dos jogos clássicos. A eficiência é verificada ao mostrar-se um acréscimo de pontos de estabilidade e equilíbrio nas soluções de um jogo quantizado. A generalização é verificada ao mostrar-se que qualquer jogo clássico finito pode ser descrito e implementado pelo formalismo quântico mas não o inverso [18, 92]. A eficiência é verificada ao mostrar-se

que a quantidade de recursos físicos e o tempo de processamento num jogo quântico são menores que num jogo clássico [18,92,93,100].

Ao contrário da TJs clássicos, na Teoria de Jogos Quânticos (TJQs) existe inerentemente um apelo físico do sistema em questão. As estratégias de um jogador são expressas pela atuação de operadores sobre estados quânticos que representam um sistema físico específico. Os estados quânticos iniciais representam a disposição (preparação) inicial do jogo. Os estados quânticos finais (após todas as operações) representam a disposição final do jogo.

Sem qualquer perda de generalidade, com apenas dois jogadores e duas estratégias podemos descrever todas as relações associadas a um Jogo Quântico (JQ). Assim, seguindo o protocolo⁴ de Jens Eisert *et al* [13,16], um JQ entre dois jogadores, A e B , pode ser completamente descrito pelo conjunto $\Omega_Q = \{\mathcal{H}, \mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B, \rho\}$; onde \mathcal{H} é o espaço de Hilbert total do jogo; \mathcal{S}_A e \mathcal{S}_B é o conjunto de estratégias quânticas permissíveis de A e de B , respectivamente; \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B é a *aptidão* (função de avaliação) do jogador A e do jogador B , respectivamente e finalmente ρ é a matriz densidade que define os estados quânticos do jogo.

As premissas básicas a serem obedecidas na quantização de um jogo são os postulados da Mecânica Quântica (MQ) [30,31,103,104]. Portanto, o espaço de Hilbert total de um jogo é o produto tensorial do espaço de cada jogador ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$). Qualquer mudança nos estados dos jogadores é realizada por operadores unitários, supondo o sistema isolado. Num jogo 2×2 , dois jogadores com duas estratégias, uma estratégia quântica $s_{A,(B)} \in \mathcal{S}_{A,(B)}$ é definida por operadores pertencentes ao grupo $SU(2)$ [19,20,18,31]. E através do postulado da medida, tomamos a média dos *operadores payoff* (que são as matrizes *payoff* na forma de operadores) para calcularmos a *aptidão* de cada jogador.

Um JQ 2×2 é descrito num espaço bidimensional, onde aqui será representado na base dos qubits $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Nesse espaço, qualquer estratégia quântica pode ser descrita por uma

⁴Na TJQs, protocolo é uma referência ao procedimento de quantização adotado.

matriz de dois parâmetros [16]:

$$U(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

onde $U \in SU(2)$ tal que $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, \pi/2]$.

O protocolo de J. Eisert *et al* para um JQ entre A e B pode ser resumido como [81]:

- Os jogadores enviam seus respectivos estados quânticos iniciais para um árbitro, na forma: $|\psi_0^A\rangle \otimes |\psi_0^B\rangle = |00\rangle$;
- O árbitro emaranha os estados dos jogadores aplicando uma transformação unitária não-local do tipo $J(\chi) = \cos(\chi/2)C^{\otimes 2} + i\sin(\chi/2)D^{\otimes 2}$, onde $\chi \in [0, \pi/2]$ é um parâmetro real que controla o grau de emaranhamento do sistema, $C = I = U(0, 0)$ é o operador identidade e $D = U(\pi, 0)$. Depois disso, o árbitro envia de volta os estados emaranhados para os jogadores⁵;
- Cada jogador aplica suas estratégias quânticas $U(\theta, \varphi)$ da maneira que bem entender (variando θ e φ). Eles então, re-enviam seus estados transformados para o árbitro, na forma $(U(\theta_A, \varphi_A) \otimes U(\theta_B, \varphi_B))J|00\rangle \equiv (U_A \otimes U_B)|\psi_{in}'^{AB}\rangle$;
- O árbitro aplica a transformação não-local J^\dagger para desemaranhar os estados;

E finalmente, o árbitro faz uma medida tomando a média dos operadores *payoff* de cada jogador na base do estado final do jogo $\mathcal{F}_{A,B}(U_A, U_B) = \mathcal{F}_{A,B}(\{\theta_A, \varphi_A\}, \{\theta_B, \varphi_B\}) = \text{tr}(P_{A,B}\rho_{fin})$, onde $\rho_{fin} = |\psi_{fin}^{AB}\rangle\langle\psi_{fin}^{AB}|$ tal que

$$|\psi_{fin}^{AB}\rangle = J^\dagger(\chi) \left(U(\theta_A, \varphi_A) \otimes U(\theta_B, \varphi_B) \right) J(\chi)|00\rangle. \quad (2.9)$$

⁵Para $\chi = \pi/2$ o grau de emaranhamento é máximo produzindo o estado $(|00\rangle + i|11\rangle)/2$.

Os operadores *payoff* de A e B podem ser escritos genericamente como

$$P_{A,B} = \sum_{ij} w_{ij}^{A,B} |ij\rangle\langle ij| \quad (2.10)$$

onde $w_{ij}^{A,B}$ são os coeficientes das matrizes *payoff* de A e B (2.2).

Na figura 2.1 apresentamos o circuito quântico padrão que descreve o protocolo de J. Eisert *et al.*

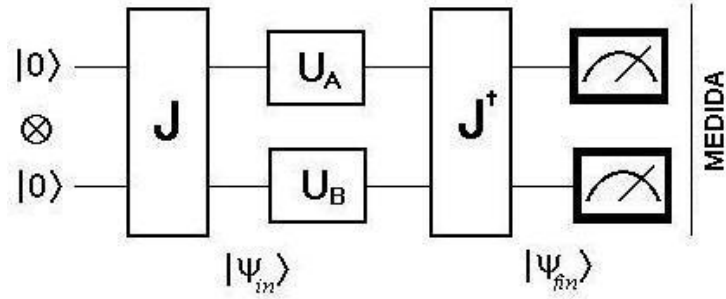


Figura 2.1: Circuito quântico descrevendo o protocolo de jogo de J. Eisert *et al.*

Nesse esquema, os pontos de EN podem ser melhor interpretados reescrevendo-os na notação

$$\mathcal{F}_A(\hat{s}_A, \hat{s}_B) - \mathcal{F}_A(s_A, \hat{s}_B) \geq 0, \quad \forall s_A, \quad (2.11a)$$

$$\mathcal{F}_B(\hat{s}_A, \hat{s}_B) - \mathcal{F}_B(\hat{s}_A, s_B) \geq 0, \quad \forall s_B. \quad (2.11b)$$

Ou seja, o par de estratégias (\hat{s}_A, \hat{s}_B) estará num EN se satisfizer (2.11a) e (2.11b) simultaneamente. Dessa forma explicitamos as estratégias quânticas e mantemos suas relações no jogo.

2.2.1 Critério de Emaranhamento

Como dito, as duas principais vantagens da quantização de jogos está na generalização do formalismo e no ganho em eficiência computacional. Portanto, definido o espaço do jogo, sempre existe um subconjunto de estratégias clássicas contido num conjunto de estratégias

quânticas [18,20]. No protocolo de J. Eisert *et al*, as estratégias desse sub-conjunto devem comutar com o operador de emaranhamento J . Ou inversamente, as operações de emaranhamento e desemaranhamento existem para resgatar os jogos clássicos associados (quantizados). Pela definição de J qualquer operador unitário na forma $U(\theta, 0)$ comuta com J e portanto será um candidato a estratégia clássica [81]. Ao se introduzir o parâmetro “ φ ” em $U(., .)$ os efeitos quânticos (superposição e emaranhamento) são sentidos pelo sistema. Dessa forma, novos pontos de equilíbrio podem surgir.

Através da Teoria de Informação Quântica vemos que a quantização de processos físicos (como a computação, criptografia e jogos) só se mostra vantajosa quando introduzimos o recurso de emaranhamento. Logo, através do operador J não só introduzimos o emaranhamento como também ganhamos uma maneira de modulá-lo. J. Du *et al* realizaram experimentos via RMN (Ressonância Magnética Nuclear) estudando possíveis valores do parâmetro de emaranhamento χ para o jogo padrão conhecido como Dilema do Prisioneiro (DP) [100]. Eles encontraram dois limiares para χ : $\chi_1 = \arcsin(\sqrt{1/5})$ e $\chi_2 = \arcsin(\sqrt{2/5})$. Quando $0 \leq \chi \leq \chi_1$ o sistema se comporta classicamente e o jogo DP clássico é resgatado; quando $\chi \geq \chi_2$ o sistema se comporta quanticamente e novos pontos de estabilidade e equilíbrio podem aparecer. E quando $\chi_1 \leq \chi \leq \chi_2$ o sistema se torna instável ficando num regime de transição entre o clássico e o quântico. Nessa região podem surgir *payoffs* maiores que para um jogo totalmente quântico [13].

2.2.2 Dilema do Prisioneiro

O “Dilema do Prisioneiro” (DP) é um bom exemplo de jogo 2×2 estático, bi-matriz, simétrico e de informação completa [13,81]. Neste jogo dois prisioneiros são colocados em celas separas e sem comunicação. Cada um possui duas estratégias: $s_{A,B}^1 = \textit{cooperar com o parceiro}$ (não entregar o amigo) e $s_{A,B}^2 = \textit{delatar o parceiro}$. De (2.2), para cada escolha

dos prisioneiros atribui-se os seguintes valores de recompensas $w_{11}^A = w_{11}^B = 3$, $w_{22}^A = w_{22}^B = 1$, $w_{12}^A = w_{21}^B = 0$ e $w_{21}^A = w_{12}^B = 5$; satisfazendo $w_{12}^A < w_{22}^A < w_{11}^A < w_{21}^A$. Através da representação matricial temos

$$\begin{array}{c} B : s^1 \quad B : s^2 \\ A : s^1 \quad \left(\begin{array}{cc} (3, 3) & (0, 5) \\ (5, 0) & (1, 1) \end{array} \right) \\ A : s^2 \end{array} = W_{A,B}, \quad (2.12)$$

Para reproduzirmos o DP no formalismo quântico nós associamos o estado $|0\rangle$ à cooperação e o estado $|1\rangle$ a delação. Portanto, se o estado inicial do jogo for $|00\rangle$, a estratégia quântica que reproduz a ação cooperar será $U(0, 0) = C$ e a estratégia quântica que reproduz a ação de delatar será $U(\pi, 0) = D$ (já que $C|0\rangle = |0\rangle$, $C|1\rangle = |1\rangle$ e $D|0\rangle = -|1\rangle$, $D|1\rangle = |0\rangle$). Além disso, os operadores *payoff* associados as matrizes *payoff*, na base computacional, serão:

$$\begin{aligned} P_A &= 3|00\rangle\langle 00| + 0|01\rangle\langle 01| + 5|10\rangle\langle 10| + 1|11\rangle\langle 11|, \\ P_B &= 3|00\rangle\langle 00| + 5|01\rangle\langle 01| + 0|10\rangle\langle 10| + 1|11\rangle\langle 11|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando esses operadores no estado final do jogo (2.9), adotando o grau máximo de emaranhamento $\chi = \pi/2$ e tomando o traço total, podemos calcular a *aptidão* de cada jogador para cada estratégia adotada. Dessa forma, de (2.11a, 2.11b) e de (2.12) concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(D, s_B) - \mathcal{F}_A(s_A, s_B) &\geq 0, \quad \forall s_A, s_B; \\ \mathcal{F}_B(s_A, D) - \mathcal{F}_B(s_A, s_B) &\geq 0, \quad \forall s_A, s_B. \end{aligned} \quad (2.14)$$

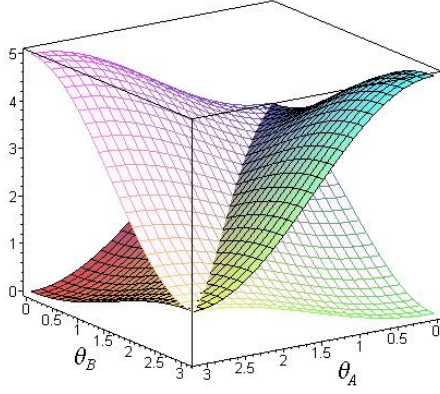
Portanto, se os jogadores usarem apenas as estratégias clássicas C e D , existirá apenas um único EN dado pelo par (D, D) , cujo *payoff* é 1. Claramente esta solução não é NP, que seria (C, C) . Esse é o grande dilema, confiar (C) ou não (D) no parceiro. Entretanto, se os jogadores usarem as propriedades quânticas de $U(\theta, \varphi)$, sobre o emaranhamento de J , eles poderão construir uma “nova estratégia” $Q = U(0, \pi/2)$. Com essa possibilidade quântica eles poderão atingir a máxima recompensa de forma estável no jogo, isto é, o NP cujo *payoff* é

3. Com a estratégia Q o dilema é solucionado pois Q é uma estratégia dominante frente C e D . As figuras 2 a 4 mostram esta relação entre as estratégias clássicas e quânticas, a partir da variação de θ_B e φ_B . Nos gráficos o eixo vertical das superfícies coloridas representa a *aptidão* de B e o eixo vertical das superfícies descoloridas representa a *aptidão* de A .

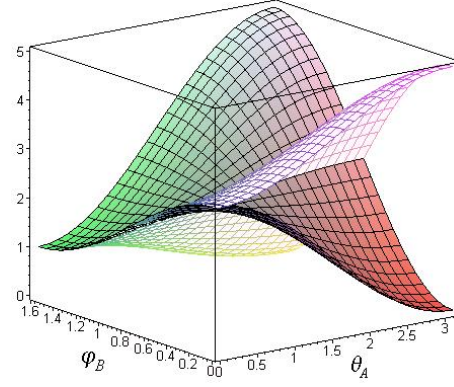
No jogo da figura 2.2(a) é reproduzido um jogo clássico misto (exceto que para um jogo clássico misto as superfícies são planas). Além disso, o jogo mostra-se totalmente simétrico. Analisando-se a *aptidão* de A tem-se que $(\theta_A = 0) \times (\theta_B = 0)$ o *payoff* é 3, para $(\theta_A = 0) \times (\theta_B = \pi)$ o *payoff* é 0, para $(\theta_A = \pi) \times (\theta_B = 0)$ o *payoff* é 5 e para $(\theta_A = 0) \times (\theta_B = 0)$ o *payoff* é 1. No jogo da figura 2.2(b) é reproduzida uma situação de disputa entre estratégias clássicas (variando θ_A) estratégias quânticas (variando-se ϕ_B). Analisando-se a *aptidão* de A ou de B tem-se que para $\varphi_B \geq \pi/4$ o jogo é totalmente dominado por B , para qualquer θ_A . No jogo da figura 2.2(c) é reproduzido jogo quântico. Nesse jogo as superfícies são totalmente coincidentes exibindo um equilíbrio total de jogo. Nessa disputa fica evidente a dominância da estratégia $Q = U(0, \pi/2)$, para qualquer jogador, onde na pior hipótese o *payoff* é 1 e na melhor igual a 3.

2.2.3 Contra-Propostas

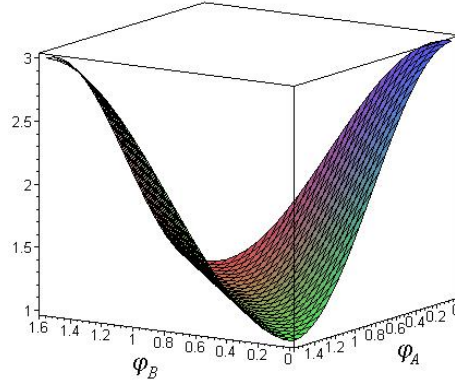
A primeira contra-proposta é na verdade uma espécie de segundo protocolo para se quantizar um jogo clássico, dado por Luca Marinatto e Tullio Weber [14]. Nesse protocolo eles chamam os estados quânticos de estratégias e os operadores quânticos de táticas. Além disso, ao invés de introduzirem os operadores J e J^\dagger eles optam pela variação dos estados quânticos iniciais (estratégias) diretamente no jogo. Ou seja, o estado inicial do jogo não é necessariamente $|00\rangle$. Eles aplicaram essa idéia numa versão social de um jogo evolucionista conhecido como “Batalha dos Sexos” [6,11]. Mostraram que, quando as estratégias iniciais



(a) Jogo entre duas estratégias clássicas $U(\theta_A, 0) \times U(\theta_B, 0)$.



(b) Jogo entre uma estratégia clássica e uma quântica $U(\theta_A, 0) \times U(0, \phi_B)$.



(c) Jogo entre duas estratégias quânticas $U(0, \phi_A) \times U(0, \phi_B)$.

Figura 2.2: Dilema do Prisioneiro Quântico e Clássico. De acordo com os valores de $\theta_{A,B}$ e $\phi_{A,B}$ nas estratégias o jogo entra num regime quântico ou clássico. Na figura 2.2(a) existe uma completa simetria; na figura 2.2(b) existem regiões de dominância; na figura 2.2(c) existe um completo equilíbrio de jogo.

(que são estados quânticos) não estão emaranhadas, o protocolo reproduz todas as características e pontos de equilíbrio do jogo clássico jogado com estratégias mistas. No entanto, quando os jogadores começam com estratégias emaranhadas o jogo apresenta novos pontos de equilíbrio. Nesse protocolo portanto, o importante é o estado inicial do jogo e não a variação dos parâmetros dos operadores quânticos.

A principal crítica a esse protocolo foi dada por Simon C. Benjamin [105]. Benjamin reivindica que o protocolo apresentado por Marinatto & Weber pode ser completamente descrito pelo protocolo de J. Eisert *et al.* Além disso, ele critica duramente a validade da solução que os novos pontos de equilíbrio encontrados no jogo quantizado fornece. E ainda questiona o esquema montado já que o que é efetivamente variado no protocolo é a probabilidade clássica de aplicação de uma tática por um jogador. Essa restrição impõe grandes limitações no protocolo.

A segunda contra-proposta é feita por S. J. van Enk & R. Pike [93]. Eles são mais radicais e reivindicam que qualquer JQ, quantizado pelo protocolo de Eisert *et al.*, pode ser inteiramente simulado por um jogo clássico num espaço adequado. Eles tomam como exemplo o jogo DP e mostram que o equivalente quântico deste jogo pode ser modelado classicamente através de um jogo no qual os dois jogadores, A e B , possuem três estratégias clássicas: C , D e Q . Além disso, eles esperam que para qualquer critério de quantização, alguma melhora em termos de eficiência ou economia deve ser apresentada sem violar premissas iniciais quando comparados com os seus sistemas clássicos. E alegam que, ao se introduzir uma estratégia como Q , no fundo, há uma alteração das regras do jogo inicial. J. Eisert responde no entanto que o DP é apenas um exemplo e que quando tomado espaços maiores a eficiência e a economia de bits são predominantes. Corroborando com J. Eisert, C. Benjamin mostrou que jogos quânticos são mais eficientes e que esses formam uma generalização dos jogos clássicos. Isto é, podemos escrever qualquer jogo clássico pelo formalismo quântico mas

o inverso não [18,20].

A última contra-proposta, até o momento, foi feita por S. C. Benjamin e P. M. Hayden [18] sobre os resultados de J. Eisert no jogo DP. Eles alegam que nem todo operador unitário pertencente a $SU(2)$ é um bom candidato a estratégia quântica. Isso porque o operador unitário mais geral possível é dado por um operador de três parâmetros:

$$U(\theta, \varphi, \beta) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) & e^{i\beta} \sin(\theta/2) \\ -e^{-i\beta} \sin(\theta/2) & e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Deste modo, usando estratégias $U(\theta, \phi, \beta)$, não existe efetivamente um equilíbrio de Nash no DP. Isto ocorre pois, se o jogador A escolher suas estratégias na forma $U_A = U(\theta, \phi, \beta)$ e o jogador B na forma $U_B = U(\theta, \phi, \pi/2 - \beta)$ então teremos $(U_A \otimes I)(|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2} = (I \otimes U_B)(|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2}$. Ou seja, com um estado inicial de jogo maximamente emaranhado, $\chi = \pi/2$, qualquer operação unitária local realizada no qubit do jogador A é equivalente a uma operação unitária local realizada no qubit do jogador B . Essa relação impõem uma quebra na simetria do jogo, já que não importa a ação de um jogador, sempre haverá inerentemente uma contra-ação de seu adversário.

J. Eisert concorda com esse resultado mas reivindica que seus resultados são válidos e corretos pois foram obtidos considerando estratégias quânticas de dois parâmetros. Além disso, essa restrição não elimina a generalidade da TJQs.

Capítulo 3

Estratégias e Recompensas a partir de Hamiltonianos Biofísicos

Com a quantização de um jogo, além das melhorias em eficiência computacional, generalização do formalismo e do aumento das soluções de jogo, revelamos uma importante forma de uso de recursos quânticos na natureza. Assim, podemos nos perguntar sobre o papel desempenhado pela TJs nas relações mais fundamentais de processos físicos e da informação associada a eles:

- *Quais as condições necessárias para modelarmos um sistema puramente físico (quântico) em termos de um jogo?*

Para respondermos essa pergunta nós focaremos nossa atenção nos sistemas quânticos abertos. A Mecânica Quântica ortodoxa é formulada sobre a premissa de que os estados quânticos de um sistema evoluem isolados dos efeitos do meio ambiente [103]. No entanto, existe um importante formalismo, conhecido como *Operações Quânticas* (OQs), que nos permite descrever as relações e as propriedades físicas de sistemas quânticos que interagem com o ambiente [30-37]. Através desse formalismo representamos os ruídos causados pelo acoplamento ambiental como operações sobre os estados quânticos do sistema principal. Essas

operações são realizadas por operadores de medida conhecidos como *operadores de Kraus* ou *superoperadores*. Utilizando os operadores de Kraus como estratégias quânticas [13], podemos modelar um sistema quântico aberto como um jogo entre partes do ambiente (ou entre configurações ambientais diferentes). Fisicamente, o ambiente insere probabilisticamente algum tipo de ruído no sistema principal através do acoplamento físico. No jogo, cada configuração ambiental representa um jogador que “manipula” suas estratégias probabilisticamente.

Para essa descrição, escolhemos o modelo teórico bio-quântico proposto por Herbert Fröhlich [21-29]. O sistema apresentado nesse modelo é de interesse não apenas pela relativa simplicidade física, como também por sua referência biológica. Essa referência é interessante pois nos possibilita, mesmo em tese, considerar efeitos quânticos sobre sistemas biológicos. Com isso, conseguimos responder uma série de possíveis relações (de micro ou de nano escala) inerente a certos sistemas biofísicos de difícil explicação pelos modelos clássicos padrões. Na contra-mão dessa proposta poderíamos nos perguntar: Por que usar TJs para modelar um sistema físico?

A primeira motivação encontra-se no formato matemático que a TJs apresenta. Nesse formato, podemos explicitar facilmente as dinâmicas computacionais que um processo de otimização apresenta. Assim, evidenciamos a natureza computacional de sistemas puramente físicos. A segunda motivação está na possibilidade de frisarmos a dinâmica da informação em sistemas abertos. A escolha de uma matriz *payoff* adequada fornece a possibilidade de mostrarmos (ou privilegiarmos) a forma pela qual a informação evolui e se relaciona fisicamente nesses sistemas. Essa caracterização é fundamental em sistemas abertos (físicos ou biofísicos) pois fornece os parâmetros de controle envolvidos no aumento e diminuição da ordem nesses sistemas.

Desta segunda motivação, destacamos a hipótese de um processamento de informação num nível sub-neuronal [39-45,72-80]. Esse processamento seria realizado por um sistema

biofísico (citoesqueleto) totalmente compatível com as premissas apresentadas no modelo de Fröhlich. Essa hipótese ganhou muitos adeptos nas últimas décadas e pode ser a chave para a descrição e entendimento de como certas funções cerebrais emergem [38-58]. Além disso, de forma geral, todo sistema biológico apresenta inerentemente relações Darwinistas que, como vimos na seção 2.1, nada mais são que aspectos de um jogo evolucionista. Portanto, modelar o sistema de Fröhlich como um jogo, mostrando a existência de pontos de equilíbrio de jogo associados a pontos de estabilidade física, significa apresentar um possível critério de otimização da informação pelo no qual a natureza pode utilizar.

3.1 Extensão das Estratégias Quânticas

O critério de quantização até aqui apresentado descreve um jogo quântico a partir de um sub-grupo das operações unitárias $SU(2)$. Entretanto, é totalmente possível uma generalização dessas operações englobando operadores de medida como estratégias quânticas [13]. Essa generalização deve somente seguir o critério de um *Mapa Completamente Positivo de Traço Preservado* (MCPTP) que expressa a condição de conservação da probabilidade ($tr(\rho) = 1$) exigida pela relação de completeza da MQ [30,103]. Com essa extensão, englobamos os operadores de Kraus que nada mais são do que operadores de medida. Um MCPTP pode ser definido pelo formalismo de OQs que ajudará a formar um laço natural entre a TJQs e sistemas quânticos abertos. As OQs descrevem diferentes tipos de ruídos expressos pelos diferentes tipos de acoplamento entre um sistema quântico e o seu meio ambiente. Assim, ao descrevermos esses ruídos como estratégias, exibimos uma correspondência entre a descrição de um sistema aberto quântico e jogos quânticos.

3.1.1 Modelo Biofísico de Fröhlich

Para explicitar nossa proposta de estratégias quânticas (operadores de Kraus) escolhemos o Hamiltoniano Biofísico proposto no modelo de Fröhlich. Herbert Fröhlich desenvolveu um modelo teórico com foco nas propriedades eletro-oscilatórias de um sistema de biomoléculas [106-108]. Uma das características mais importantes em sistemas oscilatórios é que estes podem acumular energia em certos modos de vibração. E o fluxo de energia¹, entre o sistema principal e o ambiente, tem papel fundamental na mudança e controle dos modos de vibração dessas moléculas. Além disso, biomoléculas (como proteínas, enzimas, aminoácidos) apresentam comportamento oscilatório predominante para a realização de suas tarefas. Fröhlich mostrou que, aproximando esses bio-sistemas por um grupo de osciladores harmônicos acoplados (incluindo o ambiente vizinho) é possível mostrar efeitos quânticos relevantes nos processos fisiológicos.

Essa aproximação permite a descrição da energia absorvida em termos de uma vibração não-linear, balanceada com a energia perdida. Através de um suprimento de energia adequado, pode haver aumento de ordem no sistema. Além disso, a energia fornecida para um sistema não-linear não termaliza imediatamente e pode condensar em certos modos normais de vibração. Portanto, dependendo da energia absorvida e da liberada, alguns modos de vibração podem manter a relação de suas fases e amplitudes invariantes no tempo e no espaço, tornando-se coerentes. Sistemas coerentes, que transportam energia condensada, podem conter informação. E a transferência dessa informação pode ser mediada por campos eletromagnéticos [24-26]. Nesse processo o tipo e a intensidade entre o sistema principal e o ambiente é fundamental.

¹A energia em bio-sistemas normalmente é transportada por moléculas especializadas. A ATP (adenosina de trifosfato) e a GTP (guanosina de trifosfato) são as mais comuns. Ambas fornecem energia a partir da liberação de um fosfato [26].

3.1.2 O Hamiltoniano de Fröhlich

Os maiores avanços na análise do modelo de Fröhlich foram devidos principalmente aos estudos de Tsu-Ming Wu, S. Austin e Jiří Porkoný [24-26]. Eles discutiram principalmente a estabilidade de soluções no modelo de Fröhlich descrevendo um sistema bio-quântico oscilatório em dois modos de vibração (absorção e emissão) com diferentes frequências. A partir de seus resultados, eles definiram quatro regimes de oscilação para o sistema: *incoerente*, *coerente de tempo limitado*, *coerente constante* e *sistema super coerente*². Dependendo da energia fornecida (e da perda), o sistema pode mudar de um regime incoerente para um regime de coerência constante.

Para montar o modelo de Fröhlich é preciso três constituintes básicos: *um bio-sistema eletro-oscilatório* (dito sistema principal); *uma fonte de energia* e *um banho térmico*.

Um sistema eletro-oscilatório é definido por um conjunto unidimensional suficientemente grande de sub-unidades oscilantes que apresentam carga dipolar. Essa carga produz um campo eletromagnético responsável pela interação entre as sub-unidades. O nível de excitação de cada sub-unidade do sistema depende da energia fornecida ao mesmo (figura 3.1).

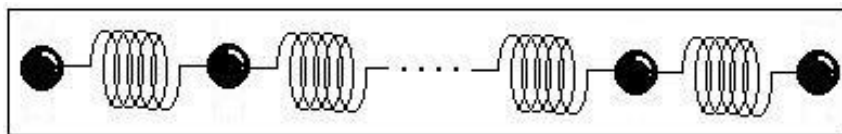


Figura 3.1: Modelo mecânico de um conjunto de osciladores harmônicos acoplados. As molas representam o acoplamento entre cada sub-sistema.

O banho térmico representa uma parte complementar do meio ambiente que está acoplada ao sistema principal. Esse acoplamento modela a perda de energia do sistema principal. No entanto, devido ao tipo de acoplamento, pode haver também um refluxo de energia fazendo com que o banho térmico funcione como uma segunda fonte de energia (figura 3.2). A

²Um sistema *super coerente* apresenta um aumento da coerência em função tempo.

combinação de emissão e absorção permite uma transferência de energia entre os modos normais com diferentes frequências; esse tipo de interação pode, muitas vezes, aparecer de forma não-linear³ [109].

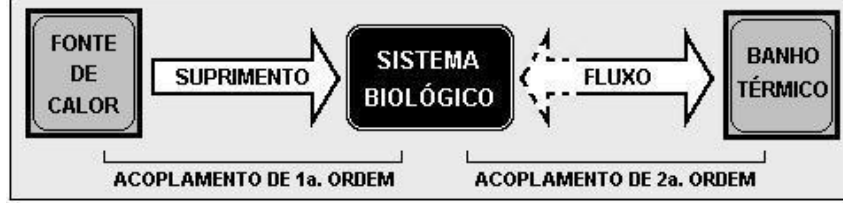


Figura 3.2: Representação esquemática da interação entre sistema principal e ambiente no modelo de Fröhlich. Através do acoplamento de 2a. ordem pode surgir uma não-linearidade no suprimento de energia contribuindo para a sustentação da coerência quântica.

Essas relações podem ser expressas pelo Hamiltoniano de Fröhlich, também conhecido como Hamiltoniano de Wu-Austin, definido como [26]

$$H = H_{Free} + H_{TB_1} + H_{SE} + H_{TB_2}, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{Free} &= \sum_i \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_j \hbar \nu_j b_j^\dagger b_j + \sum_k \hbar \mu_k c_k^\dagger c_k, \\ H_{TB_1} &= \sum_i \sum_j \hbar \delta (a_i b_j^\dagger + a_i^\dagger b_j), \\ H_{SE} &= \sum_k \sum_i \hbar \eta (c_k a_i^\dagger + c_k^\dagger a_i), \\ H_{TB_2} &= \sum_l \sum_i \sum_j \hbar \xi (a_l^\dagger a_i b_j^\dagger + a_l^\dagger a_i b_j). \end{aligned} \quad (3.2)$$

O primeiro termo de H_{Free} descreve a oscilação livre do sistema principal, onde ω , a_i^\dagger e a_i representam a frequência, o operador de criação e o operador de aniquilação do sistema principal, respectivamente (o termo \hbar é a constante de Plank dividida por 2π). O segundo termo em H_{Free} descreve a oscilação livre do banho térmico, onde ν_j , b_j^\dagger , e b_j representam a

³Essa não-linearidade é verificada calculando-se o valor médio do número de ocupação n no tempo a partir da relação $\langle \dot{N} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [N, H] \rangle$, onde $N|n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n|n\rangle$. Dessa relação mede-se a taxa de transferência (não-linear) de energia de um modo de vibração para outro [24-26].

frequência de vibração, o operador criação e o operador aniquilação, respectivamente. O terceiro termo em H_{Free} descreve a oscilação livre da fonte de calor, onde μ , c^\dagger , e c representam a frequência, operador criação e o operador aniquilação, respectivamente. O Hamiltoniano H_{TB_1} descreve um *acoplamento de primeira ordem* entre o bio-sistema e o banho térmico, mediado pela constante real de acoplamento δ . O Hamiltoniano H_{SE} descreve um *acoplamento de primeira ordem* entre o bio-sistema e a fonte de calor, mediado pela constante real de acoplamento η . E finalmente, o Hamiltoniano H_{TB_2} descreve um *acoplamento de segunda ordem* entre o bio-sistema e o banho térmico, mediado pela constante real de acoplamento ξ (vide figura 3.2).

3.2 Superoperadores no Modelo de Fröhlich

Para encontrarmos as estratégias quânticas associadas ao sistema de Fröhlich devemos calcular os superoperadores desse sistema. O formalismo de OQs descreve os superoperadores a partir do tipo de acoplamento que o sistema principal possui com o ambiente⁴. Isso significa que cada sub-Hamiltoniano, H_{TB_1} , H_{SE} e H_{TB_2} , possui um tipo de ruído quântico específico dado pelo tipo de acoplamento que apresenta. Desta forma, para começarmos nosso modelo de jogo quântico, daremos ênfase a cada tipo de acoplamento separadamente. Portanto, calcularemos os superoperadores associados aos sub-Hamiltonianos H_{SE} e H_{TB_2} , já que H_{Free} não apresenta acoplamento com o sistema principal e H_{TB_1} apresenta o mesmo tipo de acoplamento que H_{SE} , portanto os mesmos superoperadores.

Se um conjunto de superoperadores representa um tipo de ruído quântico sobre o sistema principal então, para que configuração do ambiente existe mínima perda de informação no sistema principal? Essa questão é crucial para descrevermos a matriz *payoff*, o tipo de jogo

⁴De forma geral, todo sistema físico é descrito por seus vínculos (graus de liberdade). Num sistema quântico, o que determina a natureza do sistema e a duração dos efeitos quânticos é exatamente o tipo de acoplamento com a vizinhança.

e, consequentemente, o tipo de resposta que queremos de nosso modelo. Observamos que esta questão é também fundamental na análise de qualquer sistema aberto. Como dissemos, a informação está intimamente relacionada com a ordem de um sistema. Portanto, descrever as regiões de perda e ganho de informação é descrever as possibilidades de equilíbrio natural de um sistema físico.

Para o cálculo dos superoperadores, aplicamos a equação de Schrödinger sobre os sub-Hamiltonianos H_{SE} e H_{TB_2} para encontrarmos os operadores unitários U_{SE} e U_{TB_2} , relativos a todo o espaço (bio-sistema e ambiente) em cada acoplamento separadamente⁵. Dada as relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação, podemos tomar apenas um sub-sistema x comum para cada sub-Hamiltoniano, tal que

$$U_{SE}^x = \exp \left[-it\eta(a_x c_x^\dagger + a_x^\dagger c_x) \right] \equiv \exp \left[-it\eta(ac^\dagger + a^\dagger c) \right], \quad (3.3)$$

$$U_{TB_2}^x = \exp \left[-it\xi(a_x^\dagger a_x b_x^\dagger + a_x^\dagger a_x b_x) \right] \equiv \exp \left[-it\xi(a^\dagger ab^\dagger + a^\dagger ab) \right]. \quad (3.4)$$

Adotando ρ como o estado associado ao sistema principal e tomando as bases do ambiente, *fonte de energia* e *banho térmico* respectivamente como $\{|\mathfrak{C}_s\rangle\}$ e $\{|\mathfrak{B}_k\rangle\}$, da definição de uma OQ temos [30,109]

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\rho) &= tr_{BC} \left(U_\Delta(\rho \otimes |\mathfrak{B}_0\rangle\langle\mathfrak{B}_0| \otimes |\mathfrak{C}_0\rangle\langle\mathfrak{C}_0|) U_\Delta^\dagger \right) \\ &= \sum_k \sum_s \langle \mathfrak{B}_k \mathfrak{C}_s | U_\Delta(\rho \otimes |\mathfrak{B}_0\rangle\langle\mathfrak{B}_0| \otimes |\mathfrak{C}_0\rangle\langle\mathfrak{C}_0|) U_\Delta^\dagger | \mathfrak{B}_k \mathfrak{C}_s \rangle \\ &= \sum_{ks} \mathbf{S}_{ks}^\Delta \rho \mathbf{S}_{ks}^{\Delta\dagger}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\Delta = SE, TB_2$; $tr_{BC}(\cdot)$ é o traço parcial tomado sobre as bases do ambiente e \mathbf{S}_{ks} são os superoperadores associados a uma evolução U_Δ . De forma geral podemos escrever:

$$\mathbf{S}_{ks}^\Delta = \sum_m \sum_n \langle \mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_k \mathfrak{C}_s | U_\Delta | \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_0 \mathfrak{C}_0 \rangle | \mathfrak{A}_m \rangle \langle \mathfrak{A}_n |, \quad (3.6)$$

⁵Isso pode ser feito considerando-se inicialmente uma configuração física onde os acoplamentos (de primeira e segunda ordem) são desprezíveis frente as oscilações livres e vice-versa.

onde $\{|\mathfrak{A}_i\rangle\}$ é a base do sistema principal. Agora, tomando a relação [30]

$$\exp(\varkappa R)A \exp(-\varkappa R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} C_n, \quad (3.7)$$

onde \varkappa é um número complexo e A , R e C são operadores satisfazendo:

$$C_0 = A, \quad C_1 = [R, C_0], \quad \dots, \quad C_n = [R, C_{n-1}], \quad (3.8)$$

tal que R é definido de acordo com o Hamiltoniano que determina o operador U_{Δ} ; podemos calcular cada termo de cada \mathbf{S}_{ks}^{Δ} . Assim, usando (3.3), (3.7) e as relações $[a_i^{\dagger}, c_j^{\dagger}] = 0$, $(\forall i, j)$ e $U_{SE}|\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle = |\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle$, obtemos [30,109]

$$\begin{aligned} U_{SE}|\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle &= \left(U_{SE}a^{\dagger}U_{SE}^{\dagger}\right)^n |\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cos^l(\eta t) \sin^{n-l}(\eta t) (a_x^{\dagger})^l (c_x^{\dagger})^{n-l} |\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle \\ &= \sum_{l=0}^n f(n, l) |\mathfrak{A}_l\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_{n-l}\rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde os coeficientes $f(n, l)$ são definidos por

$$f(n, l) \equiv \left[\binom{n}{l} (1 - \lambda)^l \lambda^{n-l} n! \right]^{1/2}, \quad (3.10)$$

com $\lambda = \sin^2(\eta t)$. Analogamente, usando (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} U_{TB_2}|\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-int\xi)^m}{(m!)(n!)^{-1/2}} (b + b^{\dagger})^m |\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\rangle \\ &= \sum_m^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-int\xi)^m}{(m!)(n!)^{-1/2}} g(m, j) |\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_j\mathfrak{C}_0\rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde os coeficientes $g(m, j)$ são calculados no Apêndice A.

Agora, substituindo (3.9) na expressão (3.6), nós obtemos os superoperadores relativos ao acoplamento de primeira ordem entre o sistema principal e a fonte de energia

$$\mathbf{S}_{0s}^{SE} = \sum_n f(n, n-s) |\mathfrak{A}_{n-s}\rangle \langle \mathfrak{A}_n|. \quad (3.12)$$

Da mesma forma, substituindo (3.11) na expressão (3.6), nós obtemos os superoperadores relativos ao acoplamento de segunda ordem entre o sistema principal e o banho térmico

$$\mathbf{S}_{k0}^{TB_2} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-int\xi)^m}{(m!) (n!)^{-1/2}} g(m, k) |\mathfrak{A}_n\rangle \langle \mathfrak{A}_n|. \quad (3.13)$$

Para construirmos um jogo quântico é suficiente um sistema de 2 níveis. Portanto, tomando $N = 2$, para o sistema SE obtemos

$$\mathbf{S}_{0s}^{SE} = f(0, 0 - s) |\mathfrak{A}_{0-s}\rangle \langle \mathfrak{A}_0| + f(1, 1 - s) |\mathfrak{A}_{1-s}\rangle \langle \mathfrak{A}_1|. \quad (3.14)$$

Fazendo $s = 0$ e $s = 1$, (3.14) reduz, respectivamente, a

$$\mathbf{S}_{00}^{SE} = |\mathfrak{A}_0\rangle \langle \mathfrak{A}_0| + \sqrt{1 - \lambda} |\mathfrak{A}_1\rangle \langle \mathfrak{A}_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \lambda} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{S}_{01}^{SE} = \sqrt{\lambda} |\mathfrak{A}_0\rangle \langle \mathfrak{A}_1| = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o sistema TB_2 nós precisamos analisar a convergência da série a partir de $g(m, k)$. Das relações do Apêndice A, vemos que, tomando $k = 0$ e $k = 1$, temos que para $g(m, 0)$ a série em m converge para a função cosseno e para $g(m, 1)$ a série em m converge para a função seno. Logo, (3.13) reduz a

$$\mathbf{S}_{00}^{TB_2} = |\mathfrak{A}_0\rangle \langle \mathfrak{A}_0| + \cos(t\xi) |\mathfrak{A}_1\rangle \langle \mathfrak{A}_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \gamma} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}_{10}^{TB_2} = \sin(t\xi) |\mathfrak{A}_1\rangle \langle \mathfrak{A}_1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix},$$

onde $\gamma = \sin^2(\xi t)$.

Os superoperadores apresentados em (3.15), dentro da Teoria de Informação, definem um mapa conhecido por *Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude* (CQAA) [30,31,109].

Este canal modela a perda de energia do sistema principal devido a interação com o ambiente (relaxação). Neste caso, λ representa a probabilidade de perda de um quantum de energia. Já os superoperadores (3.16), dentro da Teoria de Informação, definem uma mapa conhecido como *Canal Quântico de Amortecimento de Fase* (CQAF). Neste caso, γ representa a probabilidade do colapso da função de onda sem perda de energia devido a interação com o ambiente. Na verdade, o que este canal faz é “embaralhar” as fases dos estados quânticos do sistema principal. Esse embaralhamento funciona, na prática como uma medida sobre o sistema. Esse tipo de medida é conhecido como *descoerência*, e desempenha um papel fundamental dentro da Mecânica Quântica.

O ponto agora é criar um critério onde possamos conectar de forma concisa a otimização da informação sobre a dinâmica de sistemas abertos. Para essa questão, veremos que a TJs será uma importante e eficiente alternativa. Através da TJs será possível reinterpretarmos um canal quântico e, com isso, propomos uma forma pela qual a natureza pode proceder na estabilização de sistemas (bio) físicos. Dada a identificação dos candidatos a estratégias quânticas, o mais importante agora é a construção de um critério de recompensa (bio)fisicamente adequado ao problema.

3.3 Um Critério de Recompensa: Matriz *Payoff*

Dentro da TJQs, a matriz *payoff* precisa ser um observável pelos critérios de medida da Mecânica Quântica [103]. Isto significa que todos os componentes da matriz *payoff* correspondem aos autovalores de seus operadores associados (*operadores payoff*). Contudo, a especificação do valor desses componentes é arbitrária. As restrições desses valores devem estar vinculadas a cada situação que se está modelando. Para nosso modelo de jogo quântico, cada componente da matriz *payoff* estará ligada à informação relativa aos pares de estratégias (superoperadores) de cada jogador (A e B). Ou seja, se as estratégias são

superoperadores, as recompensas serão dadas de acordo com a retirada de informação que cada estratégia realiza sobre o sistema principal. Esse critério expressa uma medida sobre a quantidade de informação que os jogadores retiram do sistema principal.

Fisicamente, os superoperadores representam uma medida natural do ambiente sobre o sistema principal. Essa medição perturba o sistema e insere ruídos no mesmo. Queremos saber se existem pontos de estabilidade e equilíbrio no sistema onde a perda de informação é mínima e para que valores dos parâmetros quânticos esse equilíbrio ocorre.

Ao calcularmos a informação relativa a cada par de estratégias⁶, inserimos uma recursão em relação as recompensas e as ações dos jogadores, além de uma simetria natural no jogo. Nesse esquema, a recompensa que cada jogador recebe é ditada, literalmente, pela ação conjunta dos jogadores.

Para calcularmos a informação associada a cada par de estratégias quânticas nós usamos o conceito de *Informação Conjunta* [30,31]. Com a informação conjunta é possível saber a entropia associada a um par de estratégias $(s_i^A \in \mathcal{S}_A; s_j^B \in \mathcal{S}_B)$, de dois jogadores A e B . Para definirmos a informação conjunta, adotamos a notação

$$I(s_i^A, s_k^B) = -\log_2(p_{ik}^{AB}), \quad (3.17)$$

onde p_{ik}^{AB} é a probabilidade conjunta associada a um ruído quântico, referente à ocorrência simultânea do par s_i^A e s_k^B . Essa probabilidade mede o grau de dependência entre a i -ésima estratégia do jogador A e a k -ésima estratégia do jogador B . O conceito de informação conjunta é uma generalização da *informação de Shannon*, definida por⁷

$$I(s_i^A) = -\log_2(p_i^A), \quad (3.18)$$

onde p_i^A é a probabilidade de ruído quântico associado à ocorrência isolada da estratégia s_i^A .

⁶Um par significa que estamos considerando uma estratégia do jogador A e uma estratégia do jogador B .

⁷Para evitarmos singularidades, limitamos a função logaritmo na forma $|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\log_2(\varepsilon))| \leq \delta, \forall \delta \geq 0$. Para efeito de cálculo numérico assumimos $\varepsilon = 10^{-10}$.

Nos jogos determinísticos as probabilidades conjuntas serão calculadas apartir do postulado da medida⁸ por

$$p_{ik}^{AB} = \text{tr} \left(s_i^A \otimes s_k^B (\rho'_{in}) s_i^{A\dagger} \otimes s_k^{B\dagger} \right). \quad (3.19)$$

onde $\rho'_{in} = J|\psi_{in}^{AB}\rangle\langle\psi_{in}^{AB}|J^\dagger$, e os conjuntos das estratégias dos jogadores A e B são construídos a partir dos superoperadores de Fröhlich (3.15) e (3.16). Ou seja, $\mathcal{S}_A = \{\mathbf{S}_{00}^{\Delta,A} \equiv s_0^A, \mathbf{S}_{01}^{\Delta,A} \equiv s_1^A\}$ e $\mathcal{S}_B = \{\mathbf{S}_{00}^{\Delta,B} \equiv s_0^B, \mathbf{S}_{01}^{\Delta,B} \equiv s_1^B\}$, com $\Delta = SE$ para um CQAA, e $\Delta = TB_2$ para um CQAF⁹. Desse critério conseguimos a recursão desejada e a relação da informação do sistema principal com as ações dos jogadores. Substituindo as respectivas probabilidades em (3.17) ganhamos uma reinterpretação para a matriz *payoff* no nosso modelo de jogo.

A informação de Shannon (3.18) diz que se um evento acontece raramente então a informação associada a este evento deve ser elevada, e vice versa. Assim, vemos que as probabilidades (3.19) medem a frequência com que um ruído quântico ocorre apartir da aplicação de um par de estratégia (s_i^A, s_k^B) . Usando (3.17), construímos nosso parâmetro de recompensa que cada jogador recebe pela aplicação de cada estratégia. Este será um jogo do tipo cooperativo, já que ganha mais quem desorganiza menos. O máximo de desorganização só é possível se ambos cooperarem ao máximo.

Porém, é importante colocar que não estamos analisando a média da informação associada a cada par de estratégias (de A e de B). Portanto, quando um ruído ocorrer com grande frequência, isto é $\lambda \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 1$), a informação associada será baixa: $\lim_{\lambda \rightarrow 1} (\log_2(\lambda)) = 0$; mas a informação da probabilidade complementar será alta: $\lim_{\lambda \rightarrow 1} (\log_2(1 - \lambda)) = \infty$. Inversamente, quando $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\log_2(\lambda)) = \infty$, temos $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\log_2(1 - \lambda)) = 0$. Esta complementariedade mede a *vantagem que cada estratégia possui, separadamente, sobre a outra*. Numa análise geral de jogo, esta característica da matriz *payoff* não danifica a análise física.

⁸Nos jogos mistos essas probabilidades serão dadas naturalmente pela descrição estatística do modelo físico.

⁹Como analisaremos cada tipo de acoplamento (AA e AF) separadamente não há necessidade desta identificação nas estratégias, no decorrer do texto.

Ao contrário, pois como a *aptidão* de cada jogador é uma média sobre as informações, relativas a cada probabilidade de ruído, ela pode ser como uma medida da informação (ou entropia) conjunta do sistema principal. A grande vantagem dessa “nova expressão” de medida da informação de um sistema é a sua correspondência direta com as características de um jogo e a relação natural entre as características de um sistema quântico aberto. Essa correspondência nos permite analisar diretamente os pontos de equilíbrio do sistema¹⁰.

Usando os superoperadores do sistema de Fröhlich, (3.15) e (3.16), como estratégias e aplicando o critério de recompensa proposto, poderemos modelar os canais quânticos (CQAA e CQAF) como jogos quânticos. Para uma representação matricial associando a informação conjunta de cada par de estratégias, de A e de B , escrevemos a matriz *payoff*

$$\begin{array}{cc}
 B : s_0 & B : s_1 \\
 \\
 \begin{array}{l}
 A : s_0 \\
 A : s_1
 \end{array}
 &
 \begin{pmatrix}
 (I(s_0^A, s_0^B), I(s_0^B, s_0^A)) & (I(s_0^A, s_1^B), I(s_1^B, s_0^A)) \\
 (I(s_1^A, s_0^B), I(s_0^B, s_1^A)) & (I(s_1^A, s_1^B), I(s_1^B, s_1^A))
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \equiv \mathbf{W}_{A,B}. \quad (3.20)$$

Como esse critério considera a ação do adversário, existe inerentemente uma simetria no jogo. Isto porque $I(s_i^A, s_k^B)$ é igual a $I(s_k^B, s_i^A)$, $\forall i \neq k$. Entretanto, quebramos a simetria do jogo ao variarmos os parâmetros associados a cada estratégia, fazendo $\lambda_A \neq \lambda_B$ ou $\gamma_A \neq \gamma_B$. Logo, os operadores *payoff* associados as matrizes *payoff*, na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,

¹⁰Concentrando nossa análise sobre a *aptidão* dos jogadores (que é o desempenho médio do jogador) e não sobre os ganhos individuais das estratégias a consistência do modelo é completa.

ficam¹¹

$$\begin{aligned}
P_A = & I(s_0^A, s_0^B)|11\rangle\langle 11| + I(s_0^A, s_1^B)|01\rangle\langle 01| \\
& + I(s_1^A, s_0^B)|10\rangle\langle 10| + I(s_1^A, s_1^B)|00\rangle\langle 00|,
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
P_B = & I(s_0^B, s_0^A)|11\rangle\langle 11| + I(s_0^B, s_1^A)|01\rangle\langle 01| \\
& + I(s_1^B, s_0^A)|10\rangle\langle 10| + I(s_1^B, s_1^A)|00\rangle\langle 00|.
\end{aligned}$$

Esse critério liga naturalmente os pontos de estabilidade do jogo com os pontos de estabilidade física do sistema. E apesar das informações $I(s_i^A, s_k^B)$ serem clássicas, através do protocolo de jogo, ao calcularmos a *aptidão* de um jogador consideramos os efeitos quânticos associados ao estado final do jogo. Portanto, esse critério de recompensa exhibe naturalmente uma interface entre o limite clássico e quântico de um sistema aberto. Assim, veremos que é possível manter a informação do sistema principal mesmo sob canais quânticos com ruídos.

¹¹Como estamos trabalhando com um sistema físico de dois níveis a transposição para a base computacional é imediata: $|X_0\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|X_1\rangle \rightarrow |1\rangle$, para $X = \mathfrak{A}$, \mathfrak{B} e \mathfrak{C} .

Capítulo 4

O Sistema de Fröhlich como um Jogo Quântico

Usando os superoperadores do sistema Fröhlich associados ao critério de recompensa (3.20), ganhamos uma interessante interpretação (e aplicação) física para a TJs além de uma nova abordagem para sistemas quântico abertos.

Nesse contexto, duas diferentes configurações do ambiente são interpretadas como dois jogadores, A e B , que aplicam suas estratégias quânticas sobre o sistema principal. Cada aplicação é recompensada conforme o grau de desorganização deixado por essa aplicação. Para implementar essa idéia, inicialmente vamos considerar um jogo que iremos chamar de determinístico, onde os jogadores sempre aplicam suas estratégias. Posteriormente vamos considerar um jogo misto, onde os jogadores aplicam suas estratégias probabilisticamente. A figura 4.1 mostra um esquema geral dessa idéia.

Nessa representação os superoperadores do sistema de Fröhlich atuam como um canal quântico onde, no final, cada configuração ambiental A e B são diferenciadas de acordo com o grau de informação deixado no sistema principal.

Nosso objetivo é analisar para que configurações do ambiente, representado pelos superoperadores de Fröhlich, haverá menor perda de informação sobre o sistema principal. Usando

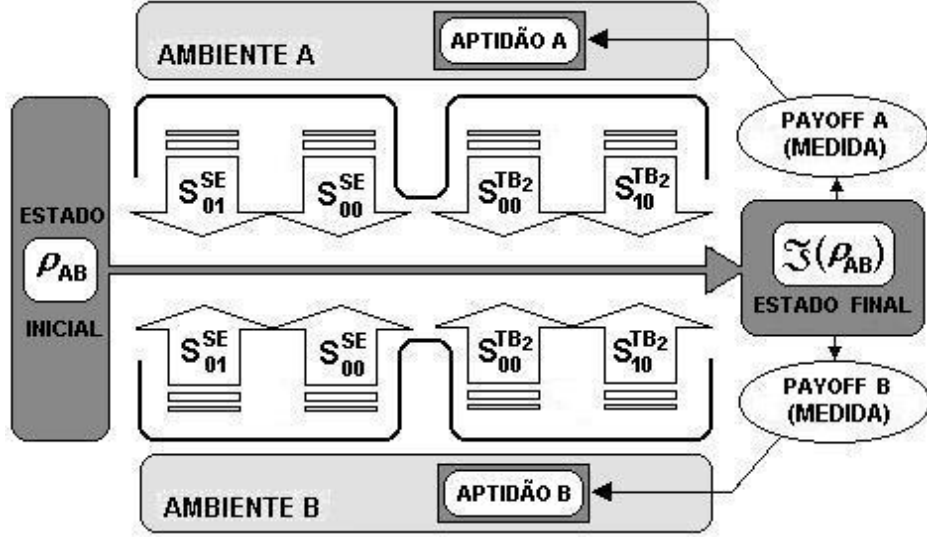


Figura 4.1: Representação do esquema de jogo proposto entre duas configurações diferentes do ambiente. Após atravessar dois canais, A e B , retribui-se positivamente à configuração ambiental que retirar menos informação do sistema principal representado pelo estado conjunto ρ_{AB} .

os superoperadores como estratégias, das soluções de equilíbrio da TJs, encontrar pontos de estabilidade física no sistema. Esses pontos expressam a menor perda de informação sobre os dois sistemas simultaneamente. Com esse procedimento, mostramos que a TJ é um excelente método de comparação e otimização de configurações de sistemas físicos. Num JQ podemos avaliar essa comparação e otimização sobre condições de emaranhamento entre essas configurações.

Apesar de não aparecerem na figura 4.1, usaremos em nossos modelos os operadores J e J^\dagger para uma maior compatibilidade com o protocolo de Eisert *et. al* e assim avaliarmos os efeitos dos canais a partir da variação do grau de emaranhamento do sistema¹. A introdução de J é perfeitamente compatível com a descrição de um sistema quântico inicialmente emaranhado. E a introdução de J^\dagger pode ser vista como uma mudança de base na medida final.

Para simplificar nossa análise, separaremos os cálculos de acordo com o tipo de canal quântico, isto é, de acordo com o tipo de acoplamento descrito em (3.2). Inicialmente,

¹Lembrando que $[J, S_{0x}^{SE}] \neq 0, [J, S_{x0}^{TB_2}] \neq 0, \forall x$.

construiremos um JQ para o Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude (CQAA) e posteriormente construiremos um JQ para o Canal Quântico de Amortecimento de Fase (CQAF). Essa separação é interessante para explicitar os efeitos individuais de cada tipo de canal descrito pela Teoria de Informação. Apesar dos efeitos de cada canal não se somarem linearmente, esse esquema fornece uma boa base de avaliação da situação física presente no sistema total.

4.1 Canais de Comunicação como Jogos Quânticos

Nesta seção implementaremos os modelos de jogos quânticos. Separaremos então duas classes de jogos quânticos, tomadas com relação à forma de aplicação das estratégias: Jogos Quânticos Determinísticos (JQDs) e Jogos Quânticos Mistos (JQMs). Em cada classe analisaremos os pontos de equilíbrio de cada tipo de canal quântico (dado pelo tipo de acoplamento) separadamente: CQAA e CQAF.

Para os JQD, analisaremos dois valores do parâmetro de emaranhamento χ no operador J , $\chi = (\chi_1 + \chi_2)/2 \approx 2\pi/11$ (emaranhamento de transição) e $\chi = \pi/2$ (emaranhamento máximo), entre as configurações A e B . Da seção 2.2.1, o primeiro valor coloca o sistema num regime entre o domínio quântico e o clássico; enquanto o segundo valor emaranha o sistema maximamente colando-o num domínio totalmente quântico.

Como os superoperadores de Fröhlich são operadores de medida, eles tendem a aniquilar qualquer tipo de efeito quântico como superposição e emaranhamento. Porém, através do critério de recompensa adotado poderemos medir a intensidade desses processos. Ou seja, nosso objetivo é exatamente analisar essa interferência ambiental sobre os efeitos quânticos do sistema principal.

4.1.1 Abordagem

Nos JQDs, nosso enfoque será a corroboração do modelo e a análise da estabilidade física do sistema a partir da análise de equilíbrio do jogo. Nos JQMs, dividiremos a abordagem em duas etapas.

Na primeira etapa mostraremos uma generalização direta de um JQD para um JQM considerando um CQAF e um CQAA. Neste modelo veremos que o JQM, associado ao CQAF, se assemelha a um jogo clássico misto descrito pelo formalismo quântico. No entanto, ele reproduz totalmente as características físicas do canal e respalda seu análogo quântico determinístico². Para modelarmos um CQAA como um JQM tomaremos um CQAA generalizado (CQAAG). Com isso, estenderemos o modelo de jogo usando também superoperadores associados ao estado do ambiente fora do equilíbrio térmico. Além disso, veremos que os JQM geram uma concepção de jogo completamente diferente dos jogos determinísticos.

A segunda etapa será apresentada no capítulo 5 onde utilizaremos o sistema de Fröhlich como modelo para a descrição da dinâmica biofísica dos microtúbulos. Deste modo, para cada tipo de acoplamento, explicitaremos os parâmetros físicos pertinentes ao sistema principal e o ambiente. Com essa abordagem poderemos analisar a estabilidade física dos microtúbulos em relação à temperatura e frequência de oscilação de suas sub-unidades. A partir dos resultados físicos obtidos, mostraremos a compatibilidade do modelo calculando as taxas de relaxação e descoerência associadas a cada acoplamento. Tanto para os JQDs quanto para os JQMs, faremos uma análise da variação da *aptidão* dos jogadores em função do valor de χ .

²Lembramos que os JQDs na verdade possuem uma natureza probabilística devido ao caráter estocástico inerente de um processo de medida quântica.

4.2 Jogos Quânticos Determinísticos (JQDs)

Um jogo determinístico é definido por um jogo onde todas as estratégias são jogadas simultaneamente (deterministicamente). Nesse caso, a *aptidão* dos jogadores é medida pela soma direta das recompensas de todas as estratégias, sobre o estado inicial.

Assim, interpretamos duas configurações ambientais, A e B , como dois jogadores que aplicam suas estratégias sobre o sistema principal. O conjunto de estratégias de cada jogador será dado pelos superoperadores (3.15) e (3.16) (desde que $\sum_k \mathbf{S}_{0k}^\Delta \mathbf{S}_{0k}^{\Delta\dagger} = \mathbf{1}$, com $\Delta = SE$ para um CQAA, e $\Delta = TB_2$ para um CQAF). Como cada canal será calculado separadamente as estratégias serão rotuladas apenas por $\mathcal{S}_A = \{s_0^A, s_1^A\}$ e $\mathcal{S}_B = \{s_0^B, s_1^B\}$, onde $s_0^{A,B} = \mathbf{S}_{00}^\Delta$ e $s_1^{A,B} = \mathbf{S}_{01}^\Delta$. Contudo, independente do tipo de acoplamento, o estado final do jogo é dado por [13]

$$\rho_{fin} = J^\dagger(\chi) \sigma J(\chi), \quad (4.1)$$

com

$$\sigma = (\mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_B)(\rho'_{in}) = \sum_{k,j=0}^1 s_k^A \otimes s_j^B (\rho'_{in}) s_k^{A\dagger} \otimes s_j^{B\dagger}, \quad (4.2)$$

onde $\rho'_{in} = |\psi'_{in}{}^{AB}\rangle \langle \psi'_{in}{}^{AB}|$, com a notação simplificada $|\psi'_{in}{}^{AB}\rangle = J(\chi) |\mathfrak{A}_0^A \mathfrak{A}_0^B\rangle \equiv J(\chi) |00\rangle = \cos(\chi/2) |00\rangle + i \sin(\chi/2) |11\rangle$. Portanto, do protocolo de J. Eisert *et al*, tomamos a média dos operadores (3.21) na base do estado final ρ_{fin} para calcularmos a *aptidão* de cada jogador.

Nesse esquema, as possíveis variações das estratégias são repassadas para as probabilidades de ruído. No caso de um CQAA, os termos λ_A e λ_B , que representam a probabilidade de relaxação do sistema, são os responsáveis por essas variações. No caso de um CQAF, os termos γ_A e γ_B , que representam a probabilidade de descoerência no sistema, são os responsáveis por essas variações. Apesar desses termos não serem números complexos, é através deles que caracterizamos os ruídos típicos de sistemas quânticos. E por carregarem as informações associadas ao acoplamento do sistema quântico com o ambiente, é através deles que

caracterizamos a natureza quântica do jogo.

4.2.1 CQAA como um JQD

Para os acoplamentos que geram ruídos do tipo de amortecimento de amplitude³, as estratégias $s_0^{A,B}$ e $s_1^{A,B}$ são dadas pelos superoperadores (3.15). Das regras de atuação desses operadores, temos que: $s_0^{A,B}|0\rangle = |0\rangle$ (invariância), $s_0^{A,B}|1\rangle = \sqrt{1 - \lambda_{A,B}}|1\rangle$ (amortecimento de amplitude), $s_1^{A,B}|0\rangle = 0$ (destruição de estado), e $s_1^{A,B}|1\rangle = \sqrt{\lambda_{A,B}}|0\rangle$ (perda de energia).

• Extensão da Forma Padrão de Jogo para um CQAA

Genericamente iniciamos o jogo com um estado na forma $|\psi_{in}^{'AB}\rangle = J(\chi)|00\rangle$. Contudo, como os superoperadores (3.15) foram calculados para um ambiente no equilíbrio térmico, convém realizarmos uma rotação de “ $\pi/2$ ” no domínio do parâmetro de emaranhamento, tal que o novo intervalo seja $\chi \in [\pi/2, \pi]$. Essa condição surge exclusivamente para o CQAA devido a regra de atuação de J e dos superoperadores (3.15) sobre o estado inicial padrão $|00\rangle$. No intervalo padrão $[0, \pi/2]$, quanto mais próximo de zero χ estiver, mais fracamente emaranhado o estado $J|00\rangle = \cos(\chi/2)|00\rangle + i\sin(\chi/2)|11\rangle$ estará, ou seja $J(\chi \rightarrow 0)|00\rangle \rightarrow |00\rangle$. Como o estado $|00\rangle$ não sofre qualquer efeito num CQAA, quanto mais fraco o emaranhamento menor o efeito no jogo. Além disso, o estado quântico mais simples passível de sofrer os efeitos de um CQAA é o estado $|1\rangle$. Desta forma, mudando o regime de χ para $[\pi/2, \pi]$, conforme o emaranhamento diminui ($\chi \rightarrow \pi$), o estado inicial $J(\chi)|00\rangle$ tende para $|11\rangle$. Portanto, para o regime de transição, escolhemos o ângulo de $\chi = 9\pi/11$ que satisfaz a condição do novo intervalo⁴ de χ . Além disso, para emaranhamento máximo mantemos

³A mesma descrição feita para H_{SE} pode ser feita para H_{TB_1} , uma vez que esses dois Hamiltonianos apresentam o mesmo tipo de acoplamento.

⁴Note que $\sin((2\pi/11)/2) = \cos((2\pi/11)/2 - \pi/2) = \cos((9\pi/11)/2)$ e $\sin((9\pi/11)/2) = \cos((2\pi/11)/2)$. Portanto, $\chi = 9\pi/11$ coloca o sistema dentro do regime transitório. Esta mudança no intervalo de χ é equivalente a adoção de um operador emaranhamento na forma $J(\chi) = \cos(\chi/2)D \otimes D + i\sin(\chi/2)I \otimes I$ ao invés de $J(\chi) = \cos(\chi/2)I \otimes I + i\sin(\chi/2)D \otimes D$, com $\chi \in [0, \pi/2]$.

$$\chi = \pi/2.$$

Seguindo então o protocolo de J. Eisert *et al*, no intervalo de emaranhamento estendido, tomamos o traço dos operadores *payoff* (3.21) sobre o estado final (4.1). E finalmente, reescrevendo as soluções de jogo (2.11a, 2.11b) na forma

$$\mathcal{F}_A(\overset{\star}{\lambda}_A, \overset{\star}{\lambda}_B) - \mathcal{F}_A(\lambda_A, \overset{\star}{\lambda}_B) \geq 0, \quad \forall \lambda_A, \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{F}_B(\overset{\star}{\lambda}_A, \overset{\star}{\lambda}_B) - \mathcal{F}_B(\overset{\star}{\lambda}_A, \lambda_B) \geq 0, \quad \forall \lambda_B. \quad (4.3b)$$

os pontos de equilíbrio são calculados num CQAA.

- *Solução Analítica*

Para estudarmos o comportamento do jogo, convém antes escrevermos analicamente a *aptidão* dos jogadores. Assim, para um valor qualquer de χ , a *aptidão* de A fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(\lambda_A, \lambda_B) = & I(s_0^A, s_0^B) \left(\cos(\chi/2) \left((\cos(\chi/2))^2 + \lambda_A \lambda_B (1 - (\cos(\chi/2))^2) \right) \right. \\ & + 2(\sin(\chi/2))^2 (\cos(\chi/2))^2 \sqrt{1 - \lambda_A} \sqrt{1 - \lambda_B} + (\sin(\chi/2))^4 (1 - \lambda_A)(1 - \lambda_B) \\ & + I(s_0^A, s_1^B) \left((\cos(\chi/2))^2 \lambda_A (1 - \lambda_B) (\sin(\chi/2))^2 + (\sin(\chi/2))^4 (1 - \lambda_A) \lambda_B \right) \\ & + I(s_1^A, s_0^B) \left((\sin(\chi/2))^4 \lambda_A (1 - \lambda_B) + (\cos(\chi/2))^2 (1 - \lambda_A) \lambda_B (\sin(\chi/2))^2 \right) \\ & + I(s_1^A, s_1^B) \left((\sin(\chi/2))^2 \left((\cos(\chi/2))^2 + \lambda_A \lambda_B - \lambda_A \lambda_B (\cos(\chi/2))^2 \right) \right. \\ & \left. \left. - 2(\sin(\chi/2))^2 (\cos(\chi/2))^2 \left(\sqrt{1 - \lambda_A} \sqrt{1 - \lambda_B} + (1 - \lambda_A)(1 - \lambda_B) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde a informação conjunta de cada para de estratégia é dada por (3.17) e (3.19):

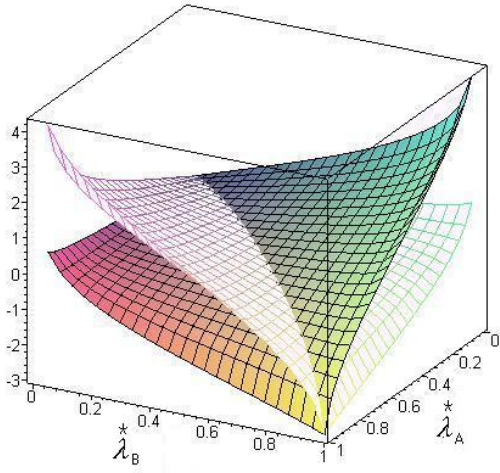
$$\begin{aligned}
I(s_0^A, s_0^B) &= -\log_2 \left((1 - \lambda_B)(1 - \lambda_A)(\sin(\chi/2))^2 + (\cos(\chi/2))^2 \right), \\
I(s_0^A, s_1^B) &= -\log_2 \left((1 - \lambda_A) \lambda_B (\sin(\chi/2))^2 \right), \\
I(s_1^A, s_0^B) &= -\log_2 \left(\lambda_A (1 - \lambda_B) (\sin(\chi/2))^2 \right), \\
I(s_1^A, s_1^B) &= -\log_2 \left(\lambda_A \lambda_B (\sin(\chi/2))^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Analogamente calcula-se a *aptidão* do jogador B , $\mathcal{F}_B(\lambda_A, \lambda_B)$.

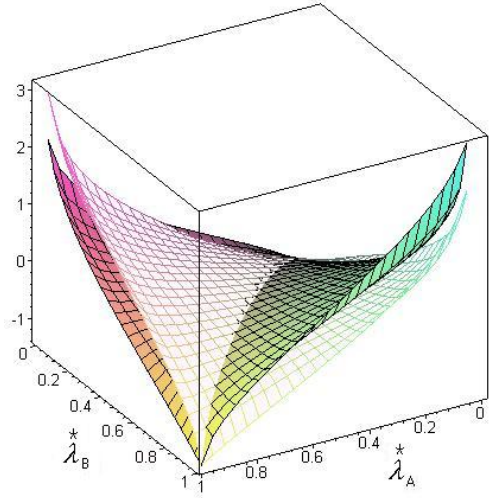
• Resultados Numéricos

Para uma análise numérica dos pontos de estabilidade e equilíbrio de (4.4), usamos dois estados emaranhados iniciais $\chi = 9\pi/11$ (regime transiente), e $\chi = \pi/2$ (regime quântico). Para cada um calculamos numericamente os pares $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)$, contra (λ_A, λ_B) , que geram os pontos em EN. As figuras 4.2 e 4.3 mostram esses pontos onde o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (4.3a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (4.3b).

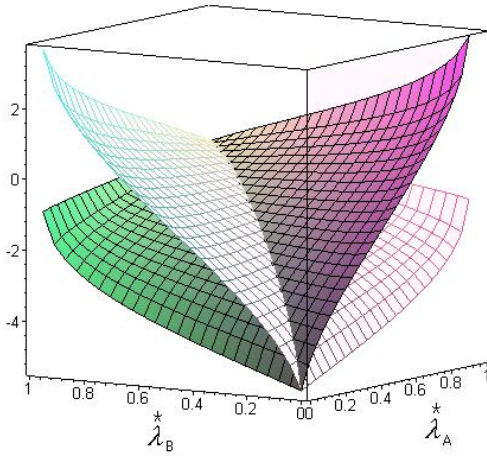
Os jogos apresentados nas figuras 4.2(a)–4.2(c) e nas figuras 4.3(a)–4.3(c) exibem uma completa simetria. Nos jogos apresentados nas figuras 4.2(d) e 4.3(d) exibem uma dominância do jogador B quando $\lambda_A^* \gtrsim 0.5$ e uma dominância do jogador A quando $0 \lesssim \lambda_A^* \lesssim 0.1$. Contudo, devido aos critérios de construção do modelo de jogo esses padrões de dominância são simetricamente invertidos com $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.1, 1)$. O jogo apresentado na figura 4.3(a) exhibe ainda duas curvas de pontos formados por EEEs. E os jogos apresentados nas figuras 4.2(a), 4.2(c), 4.2(d), 4.3(c) e 4.2(d) apresentam apenas uma curva de pontos formados por



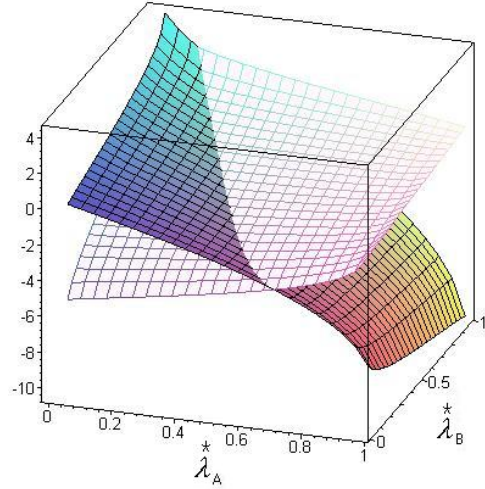
(a) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.1, 0.1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.2, 0.2)$.



(b) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 0.5)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.5, 0.5)$.

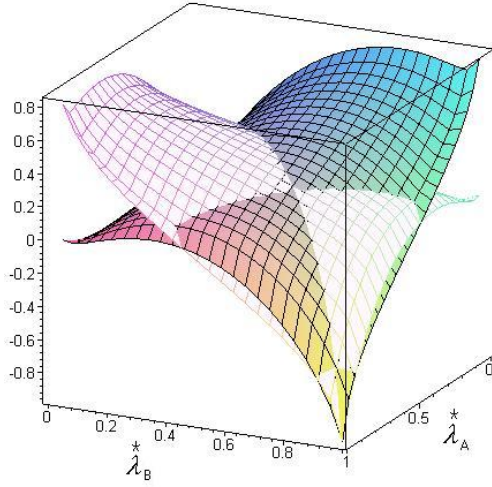


(c) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.7, 0.7)$.

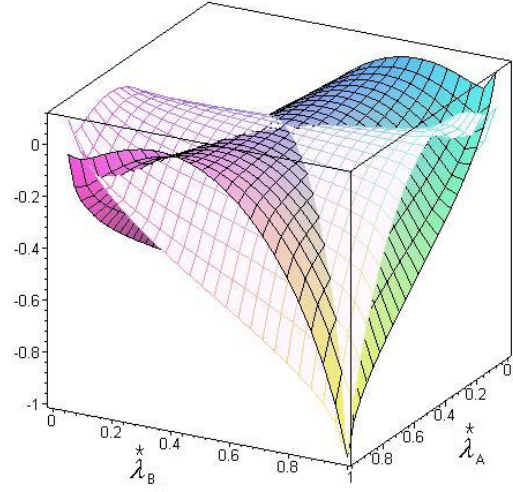


(d) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 0.1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.2, 1)$.

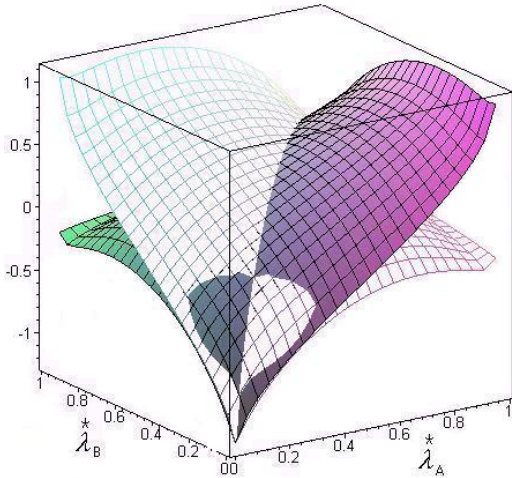
Figura 4.2: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)$ para quatro valores de (λ_A, λ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{AB}\rangle = J(\pi/2)|00\rangle$.



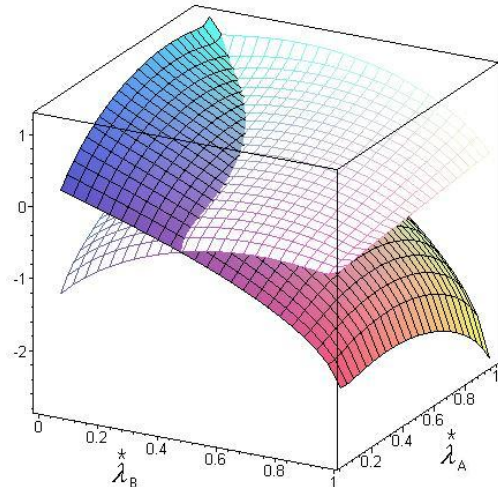
(a) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.1, 0.1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.2, 0.2)$.



(b) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 0.5)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.5, 0.5)$.



(c) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.7, 0.7)$.



(d) Pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 0.1)$ onde $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.2, 1)$.

Figura 4.3: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN $(\lambda_A^*, \lambda_B^*)$ para quatro valores de (λ_A, λ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{\prime AB}\rangle = J(9\pi/11)|00\rangle$.

EEEs. De maneira geral, em todos os jogos os pontos extremos das superfícies correspondem à regiões de vantagem individual. Além disso, mostra-se também que existem pontos em EN para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 0.1)$ e $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.1, 0.5)$ e também para $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 1)$ e para $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 0.5)$. Esses pontos de equilíbrio ocorrem tanto para $\chi = \pi/2$ quanto para $\chi = 9\pi/11$.

Esta análise numérica evidência a correspondência entre os pontos de equilíbrio do jogo e a estabilidade física do sistema. Isto porque os pontos de equilíbrio são condicionados a maior retenção de informação (ou ordem) no sistema. Este modelo mostra ainda que para $\lambda_A \neq \lambda_B$ surge naturalmente uma assimetria no sistema devido ao critério de construção de recompensa mas que não elimina os pontos de estabilidade do mesmo.

No JQD modelando a interação de dois CQAA, curiosamente o sistema apresentou um considerável número de regiões de estabilidade para um emaranhamento transiente ($\chi = 9\pi/11$) comparado com o máximo emaranhamento ($\chi = \pi/2$). Entretanto, individualmente os valores de recompensa são maiores para um emaranhamento máximo. Além disso, num jogo contra $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 0.5)$ o emaranhamento máximo apresentou uma configuração extremamente interessante de equilíbrio quase geral (figura 4.2(b)). E essa é uma situação extremamente importante pois equilibra a atuação das estratégias que, fisicamente significa probabilidade uniforme de perda de energia. E da mesma maneira, mostra-se que para valores de χ fora do regime transiente, as regiões de equilíbrio são muito menores quando comparadas com o máximo emaranhamento.

Os gráficos mostram que, exceto numa situação contra $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 1)$, figuras 4.2(c) e 4.3(c), a dominância de jogo está concentrada para estratégias com $\lambda_{A,B}^* \sim 0$. Essa dominância reflete justamente a física do sistema já que essa situação é a menor probabilidade de perda de energia e portanto, menor perda de informação do sistema individual. Num jogo contra $(\lambda_A, \lambda_B) = (1, 1)$ o emaranhamento transiente ($\chi = 9\pi/11$) mostrou uma maior

região de estabilidade. Entretanto individualmente o emaranhamento exibiu maiores *pay-offs*. E de maneira geral, houve um decréscimo considerável dos valores dos *payoffs* quando comparados a $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.1, 0.1)$ e $(\lambda_A, \lambda_B) = (0.5, 0.5)$.

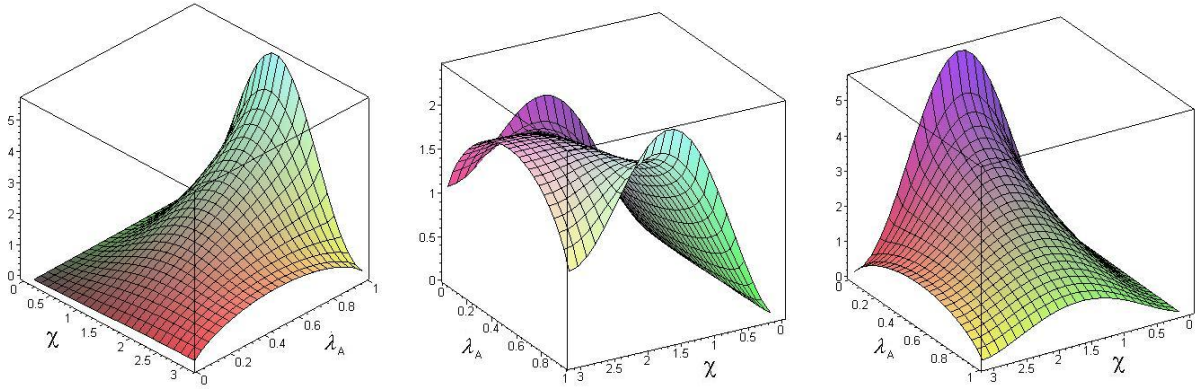
A principal conclusão é que, num CQAA, mesmo sob intenso ruído o sistema ainda apresenta equilíbrio e estabilidade física. Uma interpretação interessante é feita ao considerarmos o sistema num ponto de EEE, onde qualquer variação no ruído λ seria punida por seleção natural. Através desse conceito podemos alegar um dispositivo natural de proteção contra erros.

• Relação *Aptidão*-Emaranhamento

Dada expressão (4.4), plotamos a dependência da *aptidão* do jogador A , num CQAA modelado como um JQD. As figuras 4.4(a)–4.4(c) mostram três gráficos tomando-se λ_B igual a 0.01, 0.5 e 1; variando-se⁵ χ de 0 a π :

Nos três gráficos o máximo da *aptidão* ocorre em $\chi = \pi/2$. Para $\lambda_B = 0.01$ o máximo da *aptidão* de A ocorre quando λ_A tende para 1. Esse efeito ocorre devido ao contrabalanceamento da estratégia s_1 , que mede a informação relativa do complemento da probabilidade de ruído. Isto é, do padrão logarítmico da informação conjunta, como o ruído do jogador B é baixo, a informação relativa à estratégia s_2 é mais alta que a informação relativa a s_1 . Porém, da estrutura da informação conjunta do CQAA (4.5), tomando $\lambda_A \rightarrow 1$ garante-se que, na média, o domínio dos logaritmos tendam a zero, o que proporciona um maior *payoff*. Esta é exatamente a complementariedade que mencionamos anteriormente. Para $\lambda_B = 1$ o argumento é o mesmo, porém inversamente. Para $\lambda_B = 0.5$, esta situação começa a se inverter. Da assimetria das estratégias e do intervalo de emaranhamento sobre o CQAA, observamos que para $\lambda_A \rightarrow 0$ os valores da *aptidão* de A são mais baixos que para $\lambda_A \rightarrow 1$.

⁵Extendemos o intervalo de χ justamente para evidenciarmos a assimetria entre os domínios $[0, \pi/2]$ e $[\pi/2, \pi]$.



(a) Aptidão do jogador A para $\lambda_B = 0.01$ com máximo em $\lambda_A = 1$ e $\chi = \pi/2$.

(b) Aptidão do jogador A para $\lambda_B = 0.5$ com máximos em $\lambda_A = 0.5$, $\chi = \pi$ e $\lambda_A = 1$, $\chi = \pi/2$.

(c) Aptidão do jogador A para $\lambda_B = 0.01$ com máximo em $\lambda_A = 0$ e $\chi = \pi/2$.

Figura 4.4: Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da intensidade do ruído λ_A . Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.

Para $\lambda_B = 1$, os maiores valores da *aptidão* são alcançados para baixos valores de $\lambda_A \rightarrow 0$. Essa situação reproduz a idéia física intuitiva para um único sistema, isto é, comparando-se com um sistema com alto ruído, $\lambda \rightarrow 1$, um sistema com baixo ruído, $\lambda \rightarrow 0$, terá muito mais informação.

4.2.2 CQAF como um JQD

Para os acoplamentos que geram ruídos do tipo de amortecimento de fase, as estratégias $s_0^{A,B}$ e $s_1^{A,B}$ são dadas pelos superoperadores (3.16). Das regras de atuação desses operadores, temos que: $s_0^{A,B}|0\rangle = |0\rangle$, $s_0^{A,B}|1\rangle = \sqrt{1 - \gamma_{A,B}}|1\rangle$, $s_1^{A,B}|0\rangle = 0$, e $s_1^{A,B}|1\rangle = \sqrt{\gamma_{A,B}}|1\rangle$.

• Extensão da Forma Padrão de Jogo para um CQAF

Um CQAF descreve o processo de descoerência que é a anulação da superposição dos estados quânticos devido a interação com o ambiente. Apesar do estado emaranhado $J(\chi)|00\rangle$

estar superposto, este não contém todos os termos de um emaranhamento entre dois estados. Esta carência influenciará diretamente no cálculo da *aptidão* dos jogadores. Como o estado $J(\chi)|00\rangle$ apresenta apenas os termos $|00\rangle$ e $|11\rangle$, os jogadores só receberão as recompensas associadas a estes termos, devido a regra de atuação dos superoperadores⁶ (3.16). Para tornarmos esse problema introduzimos no protocolo de J. Eisert *et al* uma nova operação: iniciamos o jogo no estado $|00\rangle$ e aplicamos a transformação de Hadamard H nos dois qubits ($H \otimes H$), colocando-os em superposição⁷ [30,31]. Então aplicamos o operador de emaranhamento $J(\chi)$, com $\chi \in [0, \pi/2]$ ⁸. Logo após a aplicação das estratégias o processo é feito inversamente. Além disso, o estado quântico mais simples passível de sofrer os efeitos de um CQAF é o estado $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Portanto, no protocolo extendido, substituímos em (4.1) $J(\chi)$ por $J(\chi)H \otimes H$ e $J^\dagger(\chi)$ por $J^\dagger(\chi)H \otimes H$.

Essa operação não modifica a essência do jogo, não reduz o grau de emaranhamento e não interfere nos fundamentos do protocolo original⁹. O preço é a eliminação da dependência do emaranhamento sobre as recompensas dadas por $I(s_i^A, s_k^B) \forall i, k$. Essa restrição no entanto não impõe nenhuma desvantagem já que o jogo visa avaliar o efeito de descoerência sobre os estados. Portanto, ressaltar a superposição e perder o emaranhamento na recompensa é um preço viável a se pagar. Além disso, o emaranhamento permanece no estado principal do jogo e para resgatar o emaranhamento basta não aplicar a extensão $H^{\otimes 2}$.

Então, iniciamos o jogo com um estado geral na forma $|\psi_{in}'^{AB}\rangle = J(\chi)H^{\otimes 2}|00\rangle$ e seguindo o protocolo de Eisert *et. al*, tomamos o traço dos operadores *payoff* (3.21) sobre o estado

⁶Mostra-se que sem a operação $H^{\otimes 2}$ não existe contribuição dos termos $I(s_i^x, s_k^y) \forall i \neq k$.

⁷O operador de Hadamard é definido por $H = (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)/\sqrt{2}$. Lembrando ainda que $[J, H \otimes H] = 0$.

⁸Para o CQAF não existe necessidade de transladarmos o intervalo de atuação de χ .

⁹Como $D = U(\pi, 0) = |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|$, temos $J(\chi)H \otimes H|00\rangle = (-1)^{\chi/2\pi}(|00\rangle + |11\rangle)/2 + (-1)^{-\chi/2\pi}(|01\rangle + |10\rangle)/2$ que é um estado emaranhado.

final (4.1). E finalmente, reescrevendo as soluções de jogo (2.11a, 2.11b) na forma

$$\mathcal{F}_A(\gamma_A^*, \gamma_B^*) - \mathcal{F}_A(\gamma_A, \gamma_B^*) \geq 0, \quad \forall \gamma_A, \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{F}_B(\gamma_A^*, \gamma_B^*) - \mathcal{F}_B(\gamma_A^*, \gamma_B) \geq 0, \quad \forall \gamma_B. \quad (4.6b)$$

os pontos de equilíbrio são calculados.

- *Solução Analítica*

Para um valor qualquer de χ , a *aptidão* de A fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(\gamma_A, \gamma_B) = & (I(s_0^A, s_0^B) (\sqrt{1-\gamma_A} + \sqrt{1-\gamma_B} + 1 + \sqrt{1-\gamma_A}\sqrt{1-\gamma_B}) \\ & + I(s_0^A, s_1^B) (\sqrt{1-\gamma_A} - \sqrt{1-\gamma_B} + 1 - \sqrt{1-\gamma_A}\sqrt{1-\gamma_B}) \\ & + 8 (\sqrt{1-\gamma_A} - \sqrt{1-\gamma_B}) (\cos(\chi/2))^2 + 8 (\sqrt{1-\gamma_B} - \sqrt{1-\gamma_A}) (\cos(\chi/2))^4) \\ & + I(s_1^A, s_0^B) (\sqrt{1-\gamma_B} - \sqrt{1-\gamma_A} + 1 - \sqrt{1-\gamma_A}\sqrt{1-\gamma_B}) \\ & + 8 (\sqrt{1-\gamma_A} - \sqrt{1-\gamma_B}) (\cos(\chi/2))^2 + 8 (\sqrt{1-\gamma_B} - \sqrt{1-\gamma_A}) (\cos(\chi/2))^4) \\ & + I(s_1^A, s_1^B) (\sqrt{1-\gamma_A}\sqrt{1-\gamma_B} - \sqrt{1-\gamma_B} - \sqrt{1-\gamma_A} + 1)) / 4. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde a informação conjunta é dada a partir (3.17) e (3.19):

$$\begin{aligned} I(s_0^A, s_0^B) &= -\ln((1-\gamma_A/2)(1-\gamma_B/2)), \\ I(s_0^A, s_1^B) &= -\ln(\gamma_B/2(1-\gamma_A/2)), \\ I(s_1^A, s_0^B) &= -\ln(\gamma_A/2(1-\gamma_B/2)), \\ I(s_1^A, s_1^B) &= -\ln(\gamma_A\gamma_B/4). \end{aligned} \quad (4.8)$$

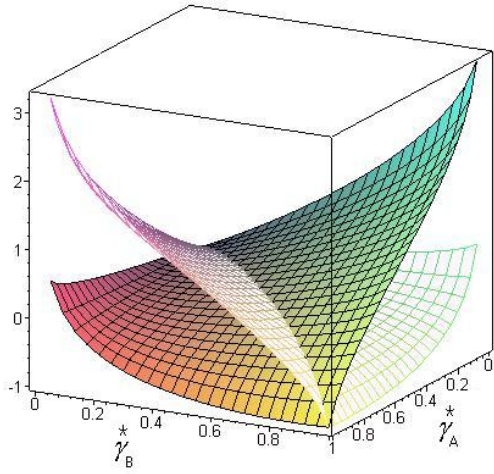
Analogamente calcula-se a *aptidão* do jogador B , $\mathcal{F}_B(\gamma_A, \gamma_B)$, trocando-se nos índices A por B .

- *Resultados Numéricos*

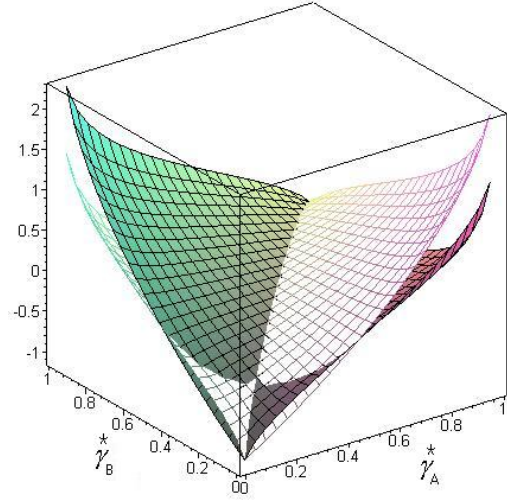
Para uma análise numérica dos pontos de estabilidade e equilíbrio de (4.7), usamos os dois estados emaranhados iniciais $J(\pi/2)|00\rangle$ (regime transiente), e $J(2\pi/11)|00\rangle$ (regime quântico). Para cada um calculamos numericamente os pares (γ_A^*, γ_B^*) , contra (γ_A, γ_B) , que geram pontos em EN e EEes. As figuras 4.5 e 4.6 mostram esses pontos onde, novamente, o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (4.6a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (4.6b).

Os jogos apresentados nas figuras 4.5(a)–4.5(c) e nas figuras 4.6(a)–4.6(c) exibem uma completa simetria. Nos jogos apresentados nas figuras 4.5(d) e 4.6(d) exibem uma total dominância do jogador B sobre o jogador A . Novamente, devido aos critérios de construção do modelo de jogo esses padrões de dominância são simetricamente invertidos com $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.5, 1)$. Os jogos apresentados nas figuras 4.2(a)–4.2(c), e nas figuras 4.3(a) e 4.2(b) apresentam uma curva de pontos formados por EEes. De maneira geral, em todos os jogos os pontos extremos das superfícies correspondem à regiões de vantagem individual. Além disso, mostra-se também que existem pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.1, 1)$ e $(\gamma_A, \gamma_B) = (1, 0.1)$ e também para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.5, 0.1)$ e $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.1, 0.5)$. Esses pontos de equilíbrio ocorrem tanto para $\chi = \pi/2$ quanto para $\chi = 2\pi/11$.

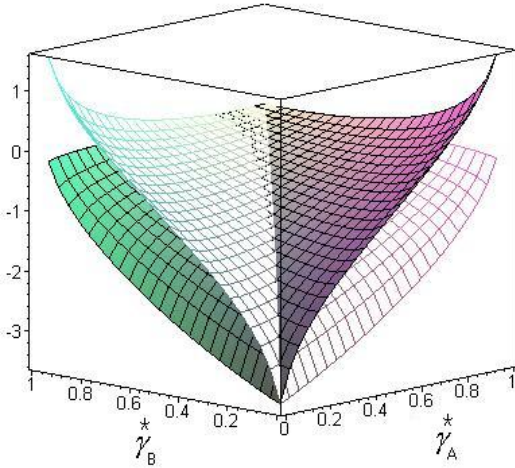
Novamente o jogo apresenta um padrão de estabilidade bastante interessante para a região transiente de emaranhamento ($\chi = 2\pi/11$). Entretanto, de maneira geral, o quadro de maior estabilidade agora ocorre para um máximo emaranhamento ($\chi = \pi/2$). Individualmente os valores dos *payoffs* dos jogadores quando $\chi = \pi/2$ superam consideravelmente o valor ganho do que quando $\chi = 2\pi/11$. (Lembramos que quanto menos informação um ruído retira do sistema principal maior o seu *payoff*). Os jogos contra $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.5, 0.5)$ o máximo



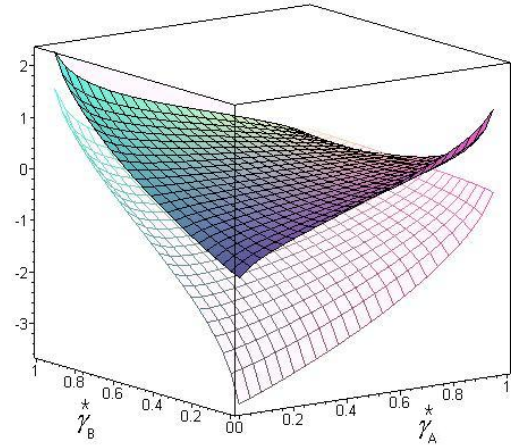
(a) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.1, 0.1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.4, 0.4)$.



(b) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.5, 0.5)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.8, 0.8)$.

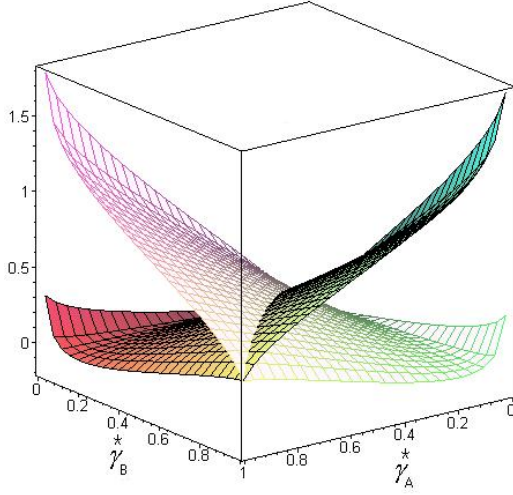


(c) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (1, 1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (1, 1)$.

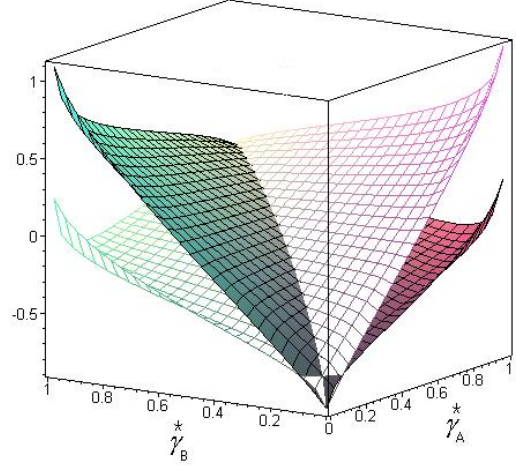


(d) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (1, 0.1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (1, 0.7)$.

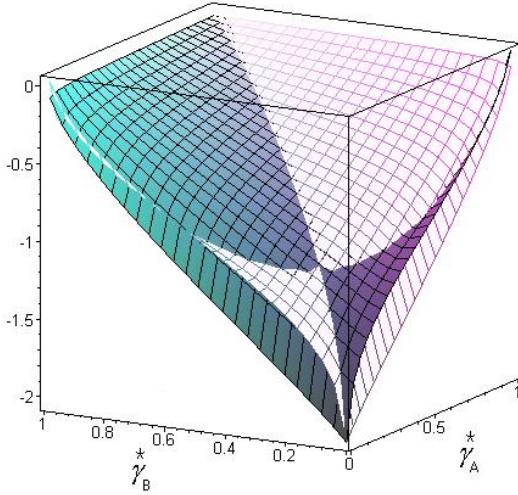
Figura 4.5: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (γ_A^*, γ_B^*) para quatro valores de (γ_A, γ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAFs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{\prime AB}\rangle = J(\pi/2)|00\rangle$.



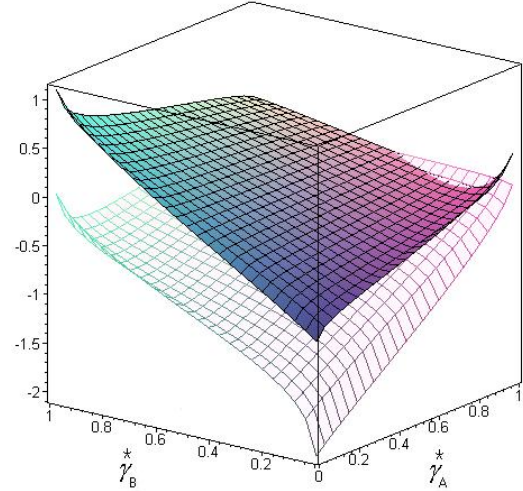
(a) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.1, 0.1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (0.7, 0.7)$.



(b) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (0.5, 0.5)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (1, 1)$.



(c) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (1, 1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$.



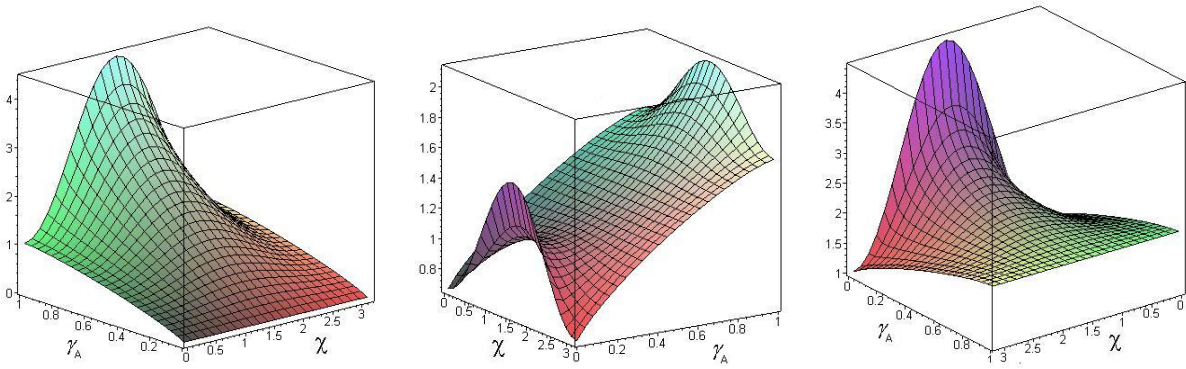
(d) Pontos em EN para $(\gamma_A, \gamma_B) = (1, 0.1)$ onde $(\gamma_A^*, \gamma_B^*)_{\text{MAX}} \approx (1, 0.2)$.

Figura 4.6: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (γ_A^*, γ_B^*) para quatro valores de (γ_A, γ_B) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{AB}\rangle = J(2\pi/11)|00\rangle$.

emaranhamento apresentou novamente uma excelente configuração de estabilidade a partir da proximidade das superfícies (figura 4.5(b)). E, assim como num CQAA, num CQAF a dominância de jogo está concentrada para estratégias com $\dot{\gamma}_{A,B}^* \sim 0$. Essa dominância reflete maior estabilidade frente ao tempo de superposição dos estados. A principal conclusão é que, num CQAF, mesmo sob intenso ruído o sistema ainda apresenta equilíbrio físico graças à conservação da informação.

• Relação *Aptidão*-Emaranhamento

Dada expressão (4.7), plotamos a dependência da *aptidão* do jogador A , num CQAF modelado como um JQD. As figuras 4.7(a)–4.7(c) mostram três gráficos tomando-se γ_B igual a 0.01, 0.5 e 1; variando-se χ de 0 a π :



(a) Aptidão do jogador A para $\gamma_B = 0.01$ com máximo em $\gamma_A = 1$ e $\chi = \pi/2$.

(b) Aptidão do jogador A para $\gamma_B = 0.5$ com máximo em $\gamma_A = 1$, $\chi = \pi/2$.

(c) Aptidão do jogador A para $\gamma_B = 0.01$ com máximo em $\gamma_A = 0$ e $\chi = \pi/2$.

Figura 4.7: Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da intensidade do ruído γ_A . Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.

Nos três gráficos o máximo da *aptidão* também ocorre em $\chi = \pi/2$. Novamente o mesmo padrão de máximos ocorre para $\gamma_B = 0.01$ e $\gamma_B = 1$ devido ao contrabalanceamento das

informações associadas as estratégias. Porém para $\gamma_B = 1$ o valor máximo da *aptidão* torna-se um pouco maior que para $\gamma_B = 0$. Esse efeito deve-se justamente à falta de dependência do emarahamento nos termos de recompensa, transferindo um peso maior para o estado final do jogo no cálculo da *aptidão*. Para $\gamma_B = 0.5$ também mostra-se a assimetria das estratégias porém, diferentemente do CQAA, não existe assimetria para χ entre 0 e π .

4.3 Jogos Quânticos Mistos (JQMs)

O próximo passo será analisar um jogo quântico misto. Um jogo misto é aquele onde os jogadores aplicam suas estratégias probabilisticamente.

A forma mais direta de generalizarmos um JQD para JQM é associar à cada aplicação de uma estratégia uma certa probabilidade. Neste caso, se assumirmos que o jogador A (B) aplica a estratégia s_0^A (s_0^B) com uma probabilidade p (q) e a estratégia s_1^A (s_1^B) com uma probabilidade $(1 - p)$ ($(1 - q)$), o estado final do jogo fica

$$\rho_{fin} = J^\dagger(\chi)(\mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_B)(\rho'_{in})J(\chi) \quad (4.9)$$

onde

$$(\mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_B)(\rho'_{in}) = \sum_{k,j=0}^1 p_k q_j s_k^A \otimes s_j^B (\rho'_{in}) s_k^{A\dagger} \otimes s_j^{B\dagger}, \quad (4.10)$$

tal que $p_0 = p$, $p_1 = (1 - p)$ e $q_0 = q$, $q_1 = (1 - q)$ e lembrando que $\rho'_{in} = J(\chi)|00\rangle\langle 00|J^\dagger(\chi)$. Porém, se o conjunto de estratégias de A e de B for formado somente pelos superoperadores de Fröhlich apresentados até aqui, (3.15) e (3.16), o mapa final $(\mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_B)(\rho'_{in})$ não representará necessariamente um estado quântico. Isto acontece pois, como $\sum_{k=0}^1 p_k \mathbf{S}_{0k}^x \mathbf{S}_{0k}^{x\dagger} \leq \mathbf{1}$, para a desigualdade, não haverá conservação do traço e portanto não teremos um esquema de jogo quântico válido.

Contudo, como já mencionado, existem duas possíveis formas de construção de jogo misto que preservam as propriedades físicas do sistema e se enquadram no esquema padrão de jogo.

Por simplicidade de construção, apresentaremos primeiramente a forma aplicada a um CQAF e então a forma aplicada a um CQAA.

4.3.1 JQM - Modelo 1:

A primeira forma de jogo misto é adequada para o CQAF. Nesse modelo usamos o teorema da não-unicidade dos superoperadores numa OQ [30]. Desse teorema é possível encontrar uma transformação que leva a aplicação determinística dos superoperadores a uma aplicação probabilística de operadores unitários. Assim, com essa transformação aparecerá naturalmente um probabilismo inerente à aplicação das estratégias.

- **Ruídos Quânticos como Transformações Unitárias**

O teorema da não-unicidade [30] diz que se os superoperadores \mathbf{E}_i , de um mapa $\mathfrak{S}(\cdot)$, for dado pelos elementos de operação $\tilde{\mathbf{E}}_i = \langle e_i | U | e_0 \rangle$, onde $\{|e_i\rangle\}$ é a base do ambiente e U o operador evolução do sistema total, então existe conjunto de superoperadores \mathbf{F}_i equivalentes a \mathbf{E}_i gerados por uma transformação unitária adicional U_E sobre o ambiente. Isto é,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_i &= \langle e_i | (I \otimes U_E) U | e_0 \rangle = \sum_j (I \otimes \langle e_i | U_E | e_j \rangle) \langle e_j | U | e_0 \rangle \\ &= \sum_j (U_E)_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j\end{aligned}\tag{4.11}$$

onde $\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = \mathbf{1}$ e $(U_E)_{ij}$ é a matriz dos elementos de U_E na base $\{|e_i\rangle\}$. Com esse teorema mostra-se que o CQAF, dado pelos superoperadores (3.16), pode ser totalmente descrito pelas operações:

$$\mathbf{O}_0 = \sqrt{\alpha} I = \sqrt{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_1 = \sqrt{1-\alpha} Z = \sqrt{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{4.12}$$

onde, a relação entre α e γ é dada por $\alpha = (1 + \sqrt{1-\gamma})/2$. O efeito desse “novo canal”, conhecido por *Canal Quântico de Troca de Fase* (CQTF), é manter a fase do estado $|0\rangle$

inalterada com probabilidade α e inverter a fase do estado $|1\rangle$ com probabilidade $(1 - \alpha)$. Fisicamente, observa-se que a superposição de estados quânticos é caracterizada pela coerência das fases de cada estado. A descorência, portanto, é um acoplamento com o ambiente que gera uma interferência entre as fases de cada sistema: ambiente e principal. Com isso, trocamos os operadores de medida por operadores unitários que “são aplicados” probabilisticamente pelo ambiente.

• Condições de Jogo

Para extrairmos um jogo misto dessa nova configuração ambiental associamos as estratégias quânticas a esses operadores unitários. Portanto, o conjunto final de estratégias, dos jogadores A e B , será $\mathcal{S}_{A,B} = \{s_0^{A,B} = I, s_1^{A,B} = Z\}$. O jogador A (B) aplica a estratégia I com probabilidade p (q)¹⁰ e a estratégia Z com probabilidade $(1 - p)$ ($(1 - q)$). Apartir de (4.9) o estado final deste jogo misto fica

$$\begin{aligned} \rho_{fin} = & J^\dagger(\chi)(pqI \otimes I(\rho'_{in})I \otimes I + p(1 - q)I \otimes Z(\rho'_{in})I \otimes Z + \\ & + (1 - p)qZ \otimes I(\rho'_{in})Z \otimes I + (1 - p)(1 - q)Z \otimes Z(\rho'_{in})Z \otimes Z)J(\chi). \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde de (4.12) $p = (1 + \sqrt{1 - \gamma_A})$ e $q = (1 + \sqrt{1 - \gamma_B})$. Nessa abordagem os termos que contém informação são as propabilidades de aplicação das etratégias, p e q . Além disso, essas probabilidades continuam carregando informação relativa ao ruído ambiental. E como essas probabilidades são independentes, o critério de recompensa será reescrito como:

$$\begin{pmatrix} I(p, q) & I(p, 1 - q) \\ I(1 - p, q) & I(1 - p, 1 - q) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_A \quad (4.14)$$

¹⁰Em geral, α é um número complexo. Entretanto, aqui, devido as propriedades de λ , podemos associá-lo diretamente a uma probabilidade clássica.

onde, analogamente para \mathbf{W}_B , temos

$$I(x, y) = -\log_2(xy). \quad (4.15)$$

• CQAF como um Jogo Misto

Para dois jogadores A e B usando um conjunto de estratégias $\mathcal{S}_{A,B} = \{I, Z\}$ onde, das regras de atuação dos operadores, temos que: $I|0\rangle = |0\rangle$ (invariância), $I|1\rangle = |1\rangle$ (invariância), $Z|0\rangle = |0\rangle$ (invariância) e $Z|1\rangle = -|1\rangle$ (troca de fase).

Usando o critério de emaranhamento extendido $J(\chi)H \otimes H$ com a matrix *payoff* (4.14) e reescrevendo as relações de equilíbrio (2.11a, 2.11b) como

$$\mathcal{F}_A(\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q}) - \mathcal{F}_A(p, \overset{\star}{q}) \geq 0, \quad \forall p, \quad (4.16a)$$

$$\mathcal{F}_B(\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q}) - \mathcal{F}_B(\overset{\star}{p}, q) \geq 0, \quad \forall q. \quad (4.16b)$$

os pontos de equilíbrio são calculados.

• Solução Analítica

Para um valor qualquer de χ , a *aptidão* de A fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(p, q) = & I(p, q)pq + 4I(p, 1 - q) \left(q (\cos(\chi/2))^2 (1 - (\cos(\chi/2))^2) \right. \\ & + p (\cos(\chi/2))^2 (1 - (\cos(\chi/2))^2) - pq/4 + p/4 \\ & + 4I(1 - p, q) \left(p (\cos(\chi/2))^2 (1 - (\cos(\chi/2))^2) \right. \\ & + q (\cos(\chi/2))^2 (1 - (\cos(\chi/2))^2) - pq/4 + q/4 \\ & \left. \left. + I(1 - p, 1 - q) \left(+q(p - 1) - 4p((\cos(\chi/2))^2 - 1) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

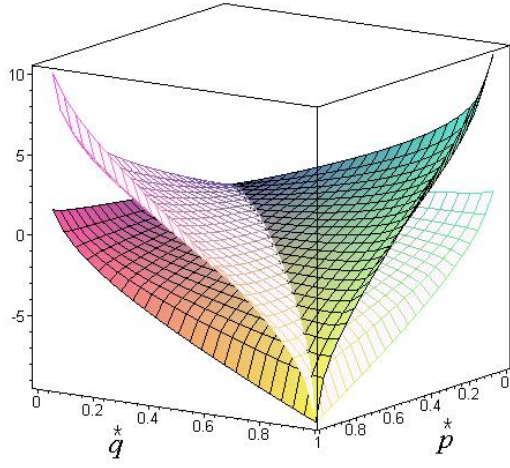
Onde a informação conjunta de cada jogador é calculada diretamente da informação conjunta de p e q , conforme (4.15). E analogamente calcula-se a *aptidão* do jogador B , $\mathcal{F}_B(p, q)$.

- *Resultados Numéricos*

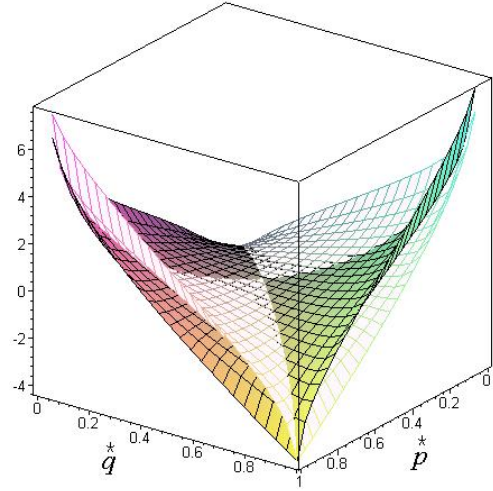
Analisaremos agora os pontos de equilíbrio apenas para estados maximamente emaranhados $J(\pi/2)H^{\otimes 2}|00\rangle$. Em seguida avaliaremos a dependência da *aptidão* dos jogadores em relação ao parâmetro de emaranhamento. Assim, iniciamos nosso jogo calculando numericamente os pares $(\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q})$, contra (p, q) que geram pontos em EN. As figuras 4.8(a)–4.8(d) mostram esses pontos onde o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (4.16a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (4.16b).

Os jogos apresentados nas figuras 4.8(a)–4.8(c) exibem uma completa simetria. No jogo apresentado na figura 4.8(d) existe uma região de dominância para o jogador A sobre o jogador B para $\overset{\star}{p} \lesssim 0.3$. Contudo, devido aos critérios de construção do modelo de jogo esse padrão de dominância é simetricamente invertido com $(p, q) = (1, 0.5)$. Além disso, os jogos apresentados nas figuras 4.8(a), 4.8(c) e 4.8(d) apresentam uma curva de pontos formados por EEES. Enquanto que o jogo apresentado na figura 4.8(b) existe uma grande curva de pontos formados por EEES, com elevados valores de *payoffs* e um ponto central de EN. De maneira geral, em todos os jogos os pontos extremos das superfícies correspondem à regiões de vantagem individual.

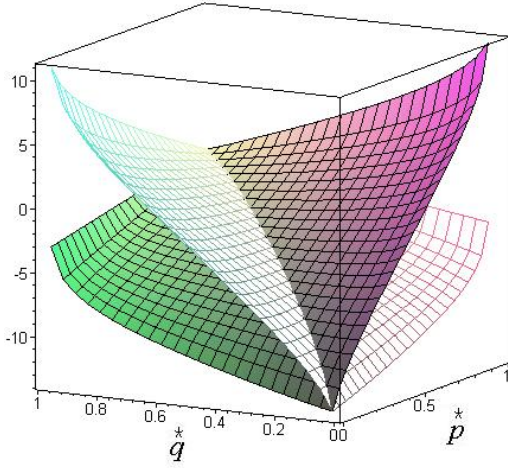
Como o canal troca de fase produz o mesmo efeito que o canal de amortecimento de fase, os modelos de JQs (determinístico e misto) também forneceram respostas muito próximas. Como os operadores nos JQMs eram operadores unitários algumas simetrias foram preservadas. Essa diferença é mais evidente analisando-se cada caso separadamente.



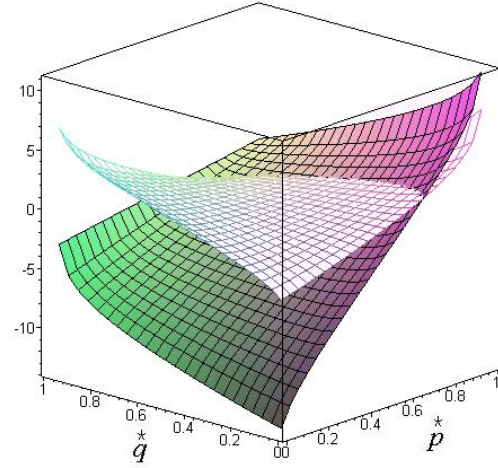
(a) Pontos em EN para $(p, q) = (0.1, 0.1)$
onde $(\hat{p}, \hat{q})_{\text{MAX}} \approx (0.1, 0.1)$.



(b) Pontos em EN para
 $(p, q) = (0.5, 0.5)$ onde
 $(\hat{p}, \hat{q})_{\text{MAX}} \approx \{(0, 1), (1, 0)\}$.



(c) Pontos em EN para $(p, q) = (1, 1)$
onde $(\hat{p}, \hat{q})_{\text{MAX}} \approx (1, 1)$.

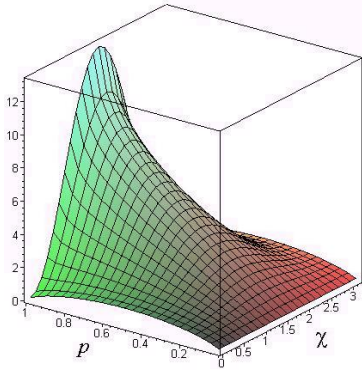


(d) Pontos em EN para $(p, q) = (1, 0.1)$
onde $(\hat{p}, \hat{q})_{\text{MAX}} \approx (0.3, 0)$.

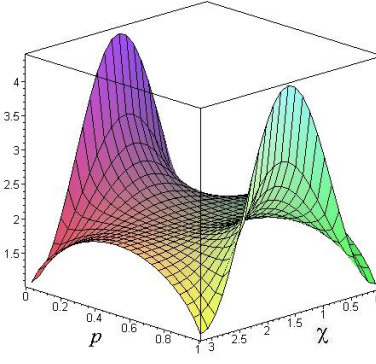
Figura 4.8: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (\hat{p}, \hat{q}) para quatro diferentes valores de (p, q) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , onde o grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{AB}\rangle = J(\pi/2)|00\rangle$.

- Relação *Aptidão*-Emaranhamento

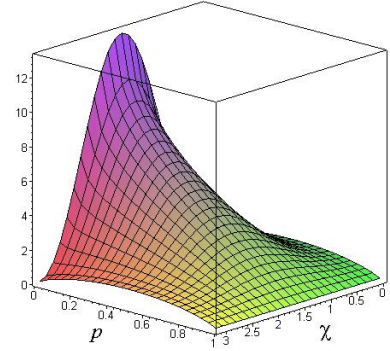
Dada a expressão (4.17), plotamos a dependência da *aptidão* do jogador A , para um CQAF modelado como um JQM. As figuras de 4.9(a) a 4.9(c) mostram três gráficos tomando-se q igual a 0.01, 0.5 e 1; variando-se χ de 0 a π .



(a) Aptidão do jogador A para $q = 0.01$ com máximo em $p = 1$ e $\chi = \pi/2$.



(b) Aptidão do jogador A para $q = 0.5$ com máximo em $p = 1$, $\chi = \pi/2$.



(c) Aptidão do jogador A para $q = 0.01$ com máximo em $p = 0$ e $\chi = \pi/2$.

Figura 4.9: Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da probabilidade p de aplicação da estratégia. Em todas as situações o máximo do acúmulo médio das recompensas é obtido com o máximo emaranhamento.

Nos três gráficos o máximo da *aptidão* ocorre com $\chi = \pi/2$. Novamente o mesmo padrão de máximos ocorre quando o adversário (jogador B) joga $q = 0.01$ e $q = 1$. Contudo, com $q = 0.5$ vemos que, usando operadores unitários não existe assimetria imposta pelas estratégias (como mostrado no JQD para um CQAF). Assim, dado um angulo χ , a distribuição da recompensa fica totalmente controlada pela probabilidade de aplicação das estratégias (que estão inteiramente ligadas à probabilidade de ruído γ).

4.3.2 JQM - Modelo 2:

A segunda forma de jogo misto é mais adequada para um CQAA. Para esse modelo de jogo misto usamos o conceito de *Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude Generalizado* (CQAAG). Um CQAAG considera também as contribuições de ruído quando o ambiente está fora do equilíbrio térmico. Assim, extendemos o conjunto de estratégias quânticas de 2 para 4 estratégias. A partir dessa descrição, será possível também uma generalização da interpretação física já que o cálculo da informação será diferente. Para isso, antes resumizamos o cálculo dos superoperadores para um CQAAG.

• Superoperadores de Fröhlich com o Ambiente Fora do Equilíbrio Térmico

O operador densidade do ambiente num estado misto para um CQAA, entre o estado de equilíbrio térmico e o estado excitado, pode ser escrito como¹¹

$$\sigma = p|\mathfrak{C}_0\rangle\langle\mathfrak{C}_0| + (1-p)|\mathfrak{C}_1\rangle\langle\mathfrak{C}_1|. \quad (4.18)$$

Da definição de Operações Quânticas [31,109], ao atravessarmos ρ por um canal quântico, obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\rho) &= \sum_i p_i \text{tr}_{BC} \left(U_{SE}(\rho \otimes |\mathfrak{B}_i \mathfrak{C}_i\rangle\langle\mathfrak{B}_i \mathfrak{C}_i|) U_{SE}^\dagger \right) \\ &= \sum_{ks} \left(p \mathbf{S}_{ks}^{SE} \rho \mathbf{S}_{ks}^{SE\dagger} + (1-p) \mathbf{S}_{ks}^{SE} \rho \mathbf{S}_{ks}^{SE\dagger} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Portanto, da definição (3.6),

$$\mathbf{S}_{ks}^{SE,i} = \sum_m \sum_n \langle \mathfrak{A}_m \mathfrak{B}_k \mathfrak{C}_s | U_{SE} | \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_0 \mathfrak{C}_i \rangle | \mathfrak{A}_m \rangle \langle \mathfrak{A}_n |, \quad (4.20)$$

teremos dois superoperadores a partir do estado de equilíbrio térmico do ambiente, com $i = 0$, e mais dois superoperadores a partir do estado excitado do ambiente, com $i = 1$.

¹¹Lembramos que o CQAA é derivado do sub-Hamiltoniano H_{SE} que atua somente na base $\{|\mathfrak{C}_1^x\rangle\}$ no espaço do ambiente. Assim o banho térmico é considerado no equilíbrio térmico.

O termo (4.20) fornece os superoperadores associados ao $|\mathfrak{C}_0\rangle$, já calculados (3.15), e para os superoperadores associados ao estado excitado $|\mathfrak{C}_1\rangle$, usamos mesmo procedimento de cálculo realizado em (3.15). Escrevendo o conjunto total dos superoperadores de um CQAAG no modelo de Fröhlich, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{00}^{SE} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{01}^{SE} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_{02}^{SE} &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{03}^{SE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Esses superoperadores formam o conjunto total final de estratégias dos jogadores num jogo quântico misto de um CQAAG¹².

• Condições de Jogo

O conjunto final de estratégias, dos jogadores A e B , será $\mathcal{S}_{A,B} = \{s_0^{A,B}, s_1^{A,B}, s_2^{A,B}, s_3^{A,B}\}$, onde $s_i^{A,B} = \mathbf{S}_{0i}^{SE}$, com $i = 0, 1, 2, 3$. Contudo, precisamos restringir a atuação dos jogadores fazendo com que ambos, A e B , apliquem as estratégias $s_0^{A,(B)}$ e $s_1^{A,(B)}$ com uma mesma probabilidade p (q) enquanto $s_2^{A,(B)}$ e $s_3^{A,(B)}$ com uma mesma probabilidade $(1-p)$ ($(1-q)$). Esta restrição surge de (4.19) para que o mapa preserve o traço e forneça um modelo físico de jogo válido.

O estado final deste jogo misto a partir da restrição física de aplicação das estratégias, e da descrição de um JQM (4.9), fica

$$\rho_{fin} = J^\dagger(\chi)\sigma J(\chi), \tag{4.22}$$

¹²É possível também construir um CQAF generalizado. Contudo, o efeito de descoerência é independente do nível de energia do ambiente. E portanto, os efeitos produzidos por CQAFG são totalmente equivalentes aos de um CQAF.

onde

$$\begin{aligned}
\sigma = & pq \left(s_0^A \otimes s_0^B (\rho'_{in}) s_0^{A\dagger} \otimes s_0^{B\dagger} + s_0^A \otimes s_1^B (\rho'_{in}) s_0^{A\dagger} \otimes s_1^{B\dagger} + \right. \\
& \left. + s_1^A \otimes s_0^B (\rho'_{in}) s_1^{A\dagger} \otimes s_0^{B\dagger} + s_1^A \otimes s_1^B (\rho'_{in}) s_1^{A\dagger} \otimes s_1^{B\dagger} \right) + \\
& p(1-q) \left(s_0^A \otimes s_2^B (\rho'_{in}) s_0^{A\dagger} \otimes s_2^{B\dagger} + s_0^A \otimes s_3^B (\rho'_{in}) s_0^{A\dagger} \otimes s_3^{B\dagger} + \right. \\
& \left. s_1^A \otimes s_2^B (\rho'_{in}) s_1^{A\dagger} \otimes s_2^{B\dagger} + s_1^A \otimes s_3^B (\rho'_{in}) s_1^{A\dagger} \otimes s_3^{B\dagger} \right) + \\
& (1-p)q \left(qs_2^A \otimes s_0^B (\rho'_{in}) s_2^{A\dagger} \otimes s_0^{B\dagger} + s_2^A \otimes s_1^B (\rho'_{in}) s_2^{A\dagger} \otimes s_1^{B\dagger} + \right. \\
& \left. s_3^A \otimes s_0^B (\rho'_{in}) s_3^{A\dagger} \otimes s_0^{B\dagger} + s_3^A \otimes s_1^B (\rho'_{in}) s_3^{A\dagger} \otimes s_1^{B\dagger} \right) + \\
& (1-p)(1-q) \left(s_2^A \otimes s_2^B (\rho'_{in}) s_2^{A\dagger} \otimes s_2^{B\dagger} + s_2^A \otimes s_3^B (\rho'_{in}) s_2^{A\dagger} \otimes s_3^{B\dagger} + \right. \\
& \left. s_3^A \otimes s_2^B (\rho'_{in}) s_3^{A\dagger} \otimes s_2^{B\dagger} + s_3^A \otimes s_3^B (\rho'_{in}) s_3^{A\dagger} \otimes s_3^{B\dagger} \right).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Analisando esse estado percebemos que o jogo pode ser interpretado como uma aplicação probabilística de canais quânticos. Do esquema de jogo determinístico vimos que as estratégias $s_0^{A,B}$ e $s_1^{A,B}$ formam um canal quântico que representa a ação do ambiente no equilíbrio térmico. Portanto, chamaremos esta ação de *Canal Quântico no Equilíbrio Térmico* (CQET). Em contrapartida as estratégias $s_2^{A,B}$ e $s_3^{A,B}$ representam a ação do ambiente no estado excitado. Portanto, chamaremos esta ação de *Canal Quântico no Estado Excitado* (CQEE).

Deste modo, como as probabilidades de aplicação das estratégias $s_0^{A,B}$ e $s_1^{A,B}$ são iguais, assim como para $s_2^{A,B}$ e $s_3^{A,B}$, podemos interpretar este esquema como um jogo de decisão de aplicação de canais quânticos: o jogador A (B) aplica um CQET com probabilidade p (q) e aplica um CQEE com probabilidade $(1-p)$ ($(1-q)$).

Neste esquema (modelo 2) vemos que existem dois parâmetros para cada jogador: a probabilidade de ruído λ , inerente às estratégias e a probabilidade de aplicação de uma estratégia p (ou q). Dependendo do parâmetro usado na distribuição das recompensas teremos critérios de recompensa diferentes e, portanto, tipos de jogos mistos diferentes. Adotaremos aqui um critério que avalia a frequência de aplicação dos canais (CQET e CQEE).

Diferentemente do CQAF, aqui as probabilidades p e q , associadas à decisão dos jogadores, não fazem referência direta aos ruídos do CQAA. Logo, se tomarmos a informação associada a essas probabilidades construiremos um jogo de avaliação sobre a aplicação dos canais, para um dado ruído. O jogo agora não avalia diretamente a perturbação provocada pelas estratégias isoladamente mas sim a frequência com que essas estratégias são jogadas. Esta análise está totalmente de acordo com os critérios padrões adotados pela TJs clássica já que o desempenho médio de uma estratégia é medido tomando-se a frequência com que ela aparece no jogo [4,6]. Nesse caso, como estamos considerando a informação associada a essas frequências (probabilidade de aplicação), significa que quanto mais uma estratégia (um canal) é usada menor sua recompensa. É importante lembrar que as probabilidades, associadas às aplicações das estratégias, são derivadas da aleatoriedade do estado do ambiente. Portanto, esse critério desloca a avaliação da informação do estado do sistema principal para uma avaliação sobre o estado do ambiente. Mas devido ao acoplamento, a informação do sistema principal é totalmente dependente do arranjo do estado do ambiente, e vice-versa¹³.

Por simplicidade de cálculo, vamos igualar o conjunto de estratégias de A e de B fazendo $\lambda_A \equiv \lambda_B = \lambda$. Dessa forma, λ será um parâmetro de ruído do sistema conjunto e p e q serão os parâmetros de controle de cada jogador. A matriz *payoff* do jogador A pode ser escrita

¹³ Isso pode ser visualizado, por exemplo, adotando-se uma distribuição de Boltzmann para p em (4.18), tal que $p = Z^{-1} \exp(-H_{SE}/kT)$ onde H_{SE} carrega informações do sistema conjunto (ambiente + sistema principal).

como:

$$\begin{array}{cc}
B : CQET & B : CQEE \\
A : CQET & \begin{pmatrix} I(ET, ET) & I(ET, EE) \\ I(EE, ET) & I(EE, EE) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{W}_A, \\
A : CQEE &
\end{array} \quad (4.24)$$

analogamente para B , onde definimos

$$I(ET, ET) = -\log_2(pq), \quad I(ET, EE) = -\log_2(p(1-q)), \quad (4.25)$$

$$I(EE, ET) = -\log_2((1-p)q), \quad I(EE, EE) = -\log_2((1-p)(1-q)).$$

Essa construção enfoca a aplicação de um canal (ET: equilíbrio térmico ou EE: estado excitado). Assim, avaliamos para que estado do ambiente o sistema se torna mais estável.

• CQAAG como um Jogo Misto

Para dois jogadores A e B usando um conjunto de estratégias $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ onde, das regras de atuação dos superoperadores, temos $s_0|0\rangle = |0\rangle$ (invariância), $s_0|1\rangle = \sqrt{1-\lambda}|1\rangle$ (amortecimento de amplitude), $s_1|0\rangle = 0$ (destruição de estado), e $s_1|1\rangle = \sqrt{\lambda}|0\rangle$ (perda de energia), e $s_2|0\rangle = \sqrt{1-\lambda}|0\rangle$ (amortecimento de amplitude), $s_2|1\rangle = |1\rangle$ (invariância), $s_3|0\rangle = \sqrt{\lambda}|1\rangle$ (ganho de energia) e finalmente $s_3|1\rangle = 0$ (destruição de estado).

Dessas regras, vemos a dificuldade de driblar a assimetria imposta pelo operador de emaranhamento $J(\chi)$. Diferentemente do caso determinístico, não podemos adotar o domínio $\chi \in [\pi/2, \pi]$. Essa mudança agora influenciaria na atuação do CQEE e manter o mesmo domínio $\chi \in [0, \pi/2]$ influenciaria na atuação do CQET. Em princípio, o domínio de χ não seria relevante em nossa análise já que, assim como no JQM do CQAF, analisaremos apenas o caso de máximo emaranhamento $\chi = \pi/2$. Entretanto, a análise de dependência da *aptidão* com o emaranhamento sairia incompleta. Além disso, para considerarmos de forma efetiva as

contribuições dos canais cruzados (mistura de CQET e CQEE), será importante adotarmos um estado emaranhado com todos os termos. Portanto, adotaremos o protocolo estendido (??) no modelo de jogo de um CQAAG. Com esse critério poderemos avaliar todos os efeitos da aplicação de cada canal.

Usando então o critério (4.24) e as relações de equilíbrio (4.16a, 4.16b), as soluções do jogo são calculadas.

- *Solução Analítica*

Para um valor qualquer de χ , a *aptidão* de A fica:

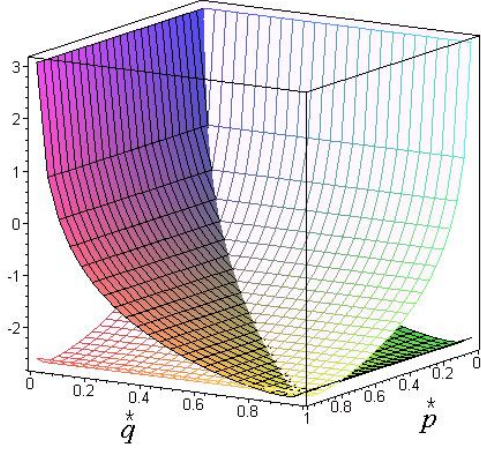
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(p, q) = & -\log_2(p(1-q)) \lambda/4 - \log_2(q(1-p)) \lambda/4 \\ & -\log_2(pq) \left(\sqrt{1-\lambda} \left(1 - 4\lambda (\cos(\chi/2))^2 + 4\lambda (\cos(\chi/2))^4 \right) + 1 - \lambda \right) /2 \\ & -\log_2((1-p)(1-q)) \left(\sqrt{1-\lambda} \left(4\lambda (\cos(\chi/2))^2 - 4\lambda (\cos(\chi/2))^4 \right) + 1 - \lambda \right) /2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analogamente calcula-se a *aptidão* do jogador B , $\mathcal{F}_B(p, q)$, trocando-se nos índices A por B .

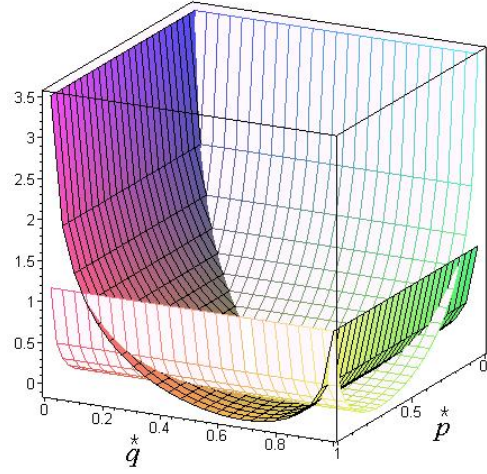
- *Resultados Numéricos*

Para o estado emaranhado $J(\pi/2)H^{\otimes 2}|00\rangle$, começamos nosso jogo. Calculamos então os melhores pares $(\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q})$, contra (p, q) , que geram os pontos em EN. As figuras 4.10(a)–4.10(d) mostram esses pontos onde o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (2.11a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (2.11b).

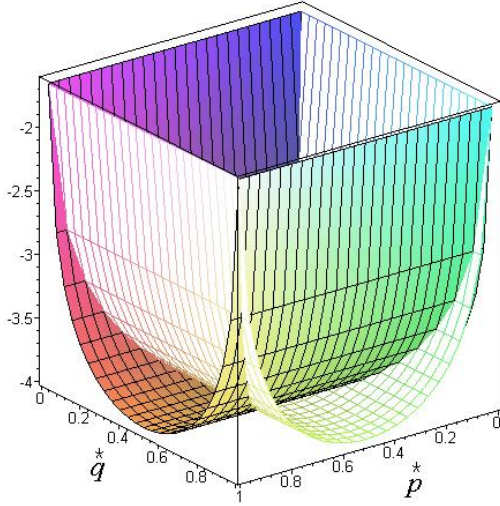
De forma geral, para um CQAAG, observamos uma uniformidade quanto a preferência do tipo de canal jogado (CQET ou CQEE). Isto porque tanto o padrão gráfico quanto os valores dos *payoffs* variam muito de acordo com a intensidade de ruído adotada e contra que estratégias está se jogando.



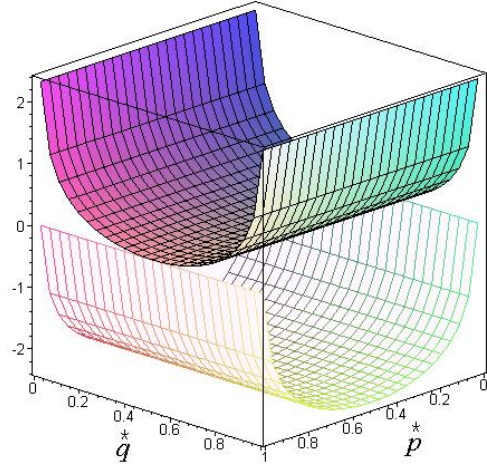
(a) Pontos em EN para $(p, q) = (0.01, 0.01)$, com ruído $\lambda = 0.1$ onde $(\bar{p}, \bar{q})_{\text{MAX}} \approx (0, 0)$.



(b) Pontos em EN para $(p, q) = (0.5, 0.5)$, com ruído $\lambda = 0.5$ onde $(\bar{p}, \bar{q})_{\text{MAX}} \approx (0, 0)$.



(c) Pontos de equilíbrio para $(p, q) = (1, 1)$, com ruído $\lambda = 1$ onde não existe nenhum EN.



(d) Pontos em EN para $(p, q) = (0.1, 0.5)$, com ruído $\lambda = 1$ onde $(\bar{p}, \bar{q})_{\text{MAX}} \approx \{(1, 0.4), (0, 0.4)\}$.

Figura 4.10: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (\bar{p}, \bar{q}) para quatro valores de (p, q) . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAGs são considerados como dois jogadores, A e B . Cada jogador aplica um CQET ou um CQEE com uma certa probabilidade, sujeito a uma certa intensidade de ruído λ . O grau de emaranhamento é dado por $|\psi_{in}^{AB}\rangle = J(\pi/2)H \otimes H|00\rangle$.

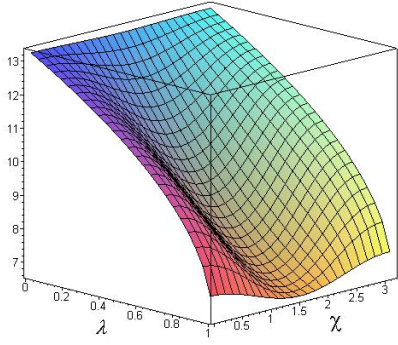
Para $\lambda = 0.1$, um jogo contra um CQEE $((p, q) = (0.01, 0.01))$ se mostrou muito mais vantajoso a aplicação conjunta de um CQET, $((\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q}) = (1, 1))$, figura 4.10(a). Apesar das outras estratégias apresentarem pontos de equilíbrio, tanto para $((\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q}) = (0, 0))$ quanto para $((\overset{\star}{p}, \overset{\star}{q}) = (0.5, 0.5))$ essas mostraram valores de máximos inferiores. Para $\lambda = 0.5$, entretanto a melhor estratégia foi uma jogada mista (CQET + CQEE). Todas as outras estratégias mostraram um padrão de jogo inferior, figura 4.10(b). Curiosamente, para $\lambda = 1$ a melhor estratégia também foi uma jogada mista. Esta situação apresentou o melhor padrão de jogo. Na figura 4.10(c) mostramos a pior situação de jogo observada onde nenhum ponto de equilíbrio foi possível. Isto é, com ruído máximo $\lambda = 1$ o pior canal é o CQEE. Na figura 4.10(d) mostramos um caso assimétrico de dominância de uma configuração ambiental B sobre A . Mas, novamente, devido ao critério de construção de jogo, essa assimetria é invertida para $(p, q) = (0.5, 0.1)$.

Como neste esquema de jogo temos três parâmetros de controle a análise é muito mais complexa. Contudo, este esquema mostra o grande poder e variabilidade de aplicação do formalismo da TJs. A partir de uma restrição física conseguimos construir um novo esquema de jogo que forneceu respostas importantes numa configuração conjunta de canais quânticos, considerando o estado do ambiente.

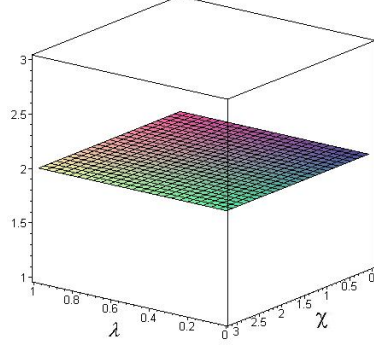
• Relação *Aptidão*-Emaranhamento

Dada a expressão (4.26), plotamos a dependência da *aptidão* do jogador A , para um CQAAG modelado como um JQM. As figuras de 4.11(a) a 4.11(c) mostram três gráficos tomando-se os valores extremos de p e q iguais a 0.1, 0.5 e 0.99. (Para $p = q = 0$ significa que os jogadores aplicam somente o CQEE, para $p = q = 1$ significa que os jogadores aplicam somente o CQET e para $p = q = 0.5$ significa que ambos aplicam uma mistura dos dois canais). Desta forma, variando-se o parâmetro de emaranhamento χ de 0 a π e o parâmetro

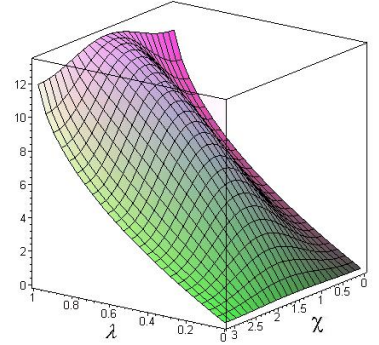
de ruído λ de 0 a 1, temos:



(a) Aptidão do jogador A para $(p, q) = (0.01, 0.01)$ com máximo em $\lambda = 0$ e $\chi = 0$ e $\chi = \pi$.



(b) Aptidão do jogador A para $(p, q) = (0.5, 0.5)$ com média zero $\forall \lambda, \chi$.



(c) Aptidão do jogador A para $(p, q) = (1, 1)$ com máximo em $\lambda = 0$ e $\chi = \pi/2$.

Figura 4.11: Aptidão do jogador A em função do emaranhamento e da probabilidade de aplicação de um CQEE ou de um CQET.

Observamos que, num JQM de um CQAAG, quanto maior a intensidade do ruído, $\lambda \rightarrow 1$, menor a *aptidão* do jogador. Entretanto, quando o adversário (B) joga um CQEE ($p = 0$ e $q = 0$) o máximo emaranhamento se mostrou a região menos eficaz para o jogador (A). A situação começa a se inverter a partir de $p > 0.5$ e $q > 0.5$. Apesar de estarmos tratando um sistema emaranhado com todos os termos, a partir do protocolo estendido usado no modelo do JQD para um CQAF, a estrutura de $J(\chi)$ ainda interfere na dinâmica do jogo. Este ainda é um excelente critério de emaranhamento e, nesta situação, o modelo de jogo exibe a exata dinâmica física.

4.4 Sistemas Abertos Quânticos: Jogos Evolucionistas?

- *Termodinâmica x Bio-Sistemas*

Do ponto de vista termodinâmico todo sistema biológico é um sistema aberto longe do equilíbrio térmico. Apesar dessa definição ser precária para explicar todas as propriedades emergentes de um ser vivo, ela pode ajudar a compreender certas condições físicas necessárias para haver vida. Dentro destas condições a mais intrigante e importante é o ordenamento presente em sistemas biológicos. Por não serem isolados do meio ambiente, a irreversibilidade e a desordem deveriam prevelacer. Entretanto, a termodinâmica também diz que, se houver um suprimento de energia adequado, um sistema aberto pode se ordenar. Genericamente, qualquer tipo de ordenamento depende da diferença entre a energia interna do sistema e a energia absorvida do meio [109,131]. Este processo pode gerar ciclos termodinâmicos no qual a dinâmica biológica pode ser entendida.

- *Darwinismo x Informação*

Em termos evolutivos, este ordenamento nos sistemas biológicos pode ser visto como um tipo de cooperação entre partes do sistema. Essa cooperação pode ser caracterizada por transporte de massa, energia e portanto, por trocas de informação. Essa idéia está no centro da descrição de como certos tipos de aglomerados de indivíduos (de animais à biomoléculas) ocorrem de maneira estável. Portanto, a quantidade de informação presente num sistema biológico é fundamental para o equilíbrio do mesmo. Se a informação mede o grau de ordem (ou desordem) de um sistema, podemos dizer que a estabilidade, e por consequência, a sobrevivência de uma população é diretamente dependente da quantidade de informação que esta população possui e/ou troca com o ambiente.

Esta idéia está no núcleo de um processo Darwinista que, em certo aspecto, privilegia indivíduos com mais informação do meio ambiente e mais organizados estruturalmente. Este privilégio reflete exatamente a estabilidade do indivíduo frente as condições impostas pelo ambiente. Isto porque, num contexto biológico, a verdadeira competição ocorre entre indivíduos e o meio¹⁴. Neste sentido, o ambiente é o grande controlador e otimizador dos indivíduos. Contra esse controle, ou exigências do meio, os indivíduos possuem uma inerente propriedade comportamental fenotípica selecionadas previamente [4-7,11,12]. Este comportamento é mais, ou menos, recompensado se prolonga mais, ou menos, a vida do indivíduo. Neste processo seletivo, quanto mais informação o indivíduo conseguir manter consigo, melhor será para sua sobrevivência.

- *Teoria de Jogos x Darwinismo*

Considerando o critério de recompensa adotado em em nossos modelos de JQs, vemos que essa relação da informação versus exigências ambientais está no núcleo da dinâmica descrita pelo sistema de Fröhlich no formato de OQs. O equilíbrio dos jogos apresentados corresponde à mínima perda conjunta de informação do sistema principal para duas configurações ambientais (dois tipos de exigências diferenciadas). As questões então são:

★ *Quais as condições para interpretarmos os modelos de jogos propostos sobre um contexto Darwinista?*

★ *Poderíamos dizer que o sistema principal “comporta-se” como uma população tentando ser mais estável frente as agressões do ambiente?*

Essa interpretação poderia colocar uma visão evolucionista sobre sistemas puramente físicos. Isso poderia ser fundamentalmente importante para a compreensão de certas dinâmicas

¹⁴Oponentes podem sempre ser considerados como parte do ambiente em disputas inter ou intra-específica.

biológicas em escalas onde a mecânica quântica tem papel influente.

- *Evolução x Sistemas Abertos (interpretação)*

Para reinterpretarmos os jogos quânticos apresentados como um processo evolucionista vamos identificar as relações e aspectos básicos da teoria Darwinista no modelo.

1. Pressão Seletiva

Para representar a pressão seletiva exercida pelo meio ambiente, reinterpretamos os operadores de medida como uma operação do ambiente. Portanto, os superoperadores de Fröhlich $\{\mathbf{S}_k(\zeta)\}$ representam as “agressões” ambientais sobre uma população de indivíduos. As probabilidades associadas a eles, ζ (ou p e q) seriam possíveis variações dessas pressões. Observamos que fisicamente os superoperadores têm exatamente esse papel.

2. População

Como os superoperadores atuam sobre os estados quânticos do sistema principal, interpretamos os estados como indivíduos de uma população. Exemplo: $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

3. Estratégias Fenotípicas

As estratégias num jogo evolucionista são interpretadas como uma expressão fenotípica do indivíduo, selecionada previamente. Portanto, a ação análoga num sistema quântico seriam as amplitudes de probabilidades associadas aos estados quânticos. Expressando essas amplitudes por operações unitárias, temos que um estado na forma $U(\theta_x, \phi_x)|x\rangle$ representa um indivíduo $|x\rangle$ cuja estratégia fenotípica é dada por $U(\theta_x, \phi_x)$. Essa transformação unitária atuaria somente no espaço do sistema principal e, considerando que estamos lidando com sistemas não controlados, essas transformações unitárias emergiriam inicialmente de forma aleatória.

4. Algoritmo Quântico Evolutivo para um Sistema Aberto

→ população inicial aleatória: $\{U(\theta_1, \phi_1)|x_1\rangle, U(\theta_2, \phi_2)|x_2\rangle, \dots, U(\theta_n, \phi_n)|x_n\rangle\}$

→ pressão seletiva ambiental: $\{\mathbf{S}_k(\zeta)\}$

→ função de avaliação (*Aptidão*): $\mathcal{F}_{A,B} = \text{tr}(P_{x_i}\rho_{x_i})$, onde

$$\rho_{fin} = \sum_k \mathbf{S}_k(\zeta) \left(U_1 \otimes \dots \otimes U_n |x_1 \dots x_n\rangle \langle x_1 \dots x_n| U_1^\dagger \otimes \dots \otimes U_n^\dagger \right) \mathbf{S}_k^\dagger(\zeta) \quad (4.27)$$

onde $U_i = U(\theta_i, \phi_i)$, $\forall i$ e os operadores P_{x_i} são dados pelo análogo de (3.21), isto é, proporcionais à informação ou à organização do sistema. Além disso, $\{\mathbf{S}_k(\zeta)\}$ forma o conjunto de medida ambiental onde ζ é o parâmetro de controle geral para toda a população (aplicação em todo o espaço).

A função de avaliação possui um aspecto aparentemente artificial. Contudo, lembramos que o critério universal de recompensa inerente ao processo de seleção natural é a sobrevivência. Mas, dentro deste critério universal, um sub-critério é a medida de organização da população, ou a quantidade de informação que a população possui e troca com o meio ambiente. Assim, os operadores *payoff* P_{x_i} , construídos a partir da medida da informação do sistema principal após interagir com o meio, pode ser a ponte necessária para expressarmos e interpretarmos um sistema quântico aberto sob a ótica Evolucionista¹⁵.

Num sistema biofísico como o de Fröhlich o sistema pode apresentar uma constante emergência de estados coerentes devido ao suprimento de energia. A frequência com que um estado $U(\theta_k, \phi_k)|x_k\rangle$ emerge numa população $\{U(\theta_1, \phi_1)|x_1\rangle, \dots, U(\theta_n, \phi_n)|x_n\rangle\}$ expressaria esse processo Darwinista (figura 4.12).

Reinterpretando os modelos de JQs apresentados nas seções anteriores, podemos dizer que tomamos apenas dois indivíduos $|0_A 0_B\rangle$, cujas estratégias fenotípicas iniciais foram

¹⁵Além disso, a introdução dos operadores de recompensa P_{x_i} é apenas metodológica, isto é, eles apenas explicitam a seleção sem acréscimo de qualquer parâmetro além dos envolvidos no sistema.

$U(\theta_A, \phi_A)U(\theta_B, \phi_B)|0_A 0_B\rangle \rightarrow J(\chi)|0_A 0_B\rangle$. Ou seja, as transformações unitárias não precisam ser locais. A pressão seletiva foi dada pelos operadores de Fröhlich (para os canais CQAA e CQAF). Explicitando o protocolo de jogo, resumimos a ação de dois indivíduos A e B frente as ações ambientais por um estado final na forma (4.27):

$$\rho_{AB} = \sum_{jk} \mathbf{S}_j^A(\zeta) \otimes \mathbf{S}_k^B(\zeta) \left(J(\chi)|00\rangle\langle 00|J^\dagger(\chi) \right) (\mathbf{S}_j^A(\zeta) \otimes \mathbf{S}_k^B(\zeta))^\dagger, \quad (4.28)$$

onde $\{\mathbf{S}_k\}$ forma o conjunto de operadores de medida ambiental.

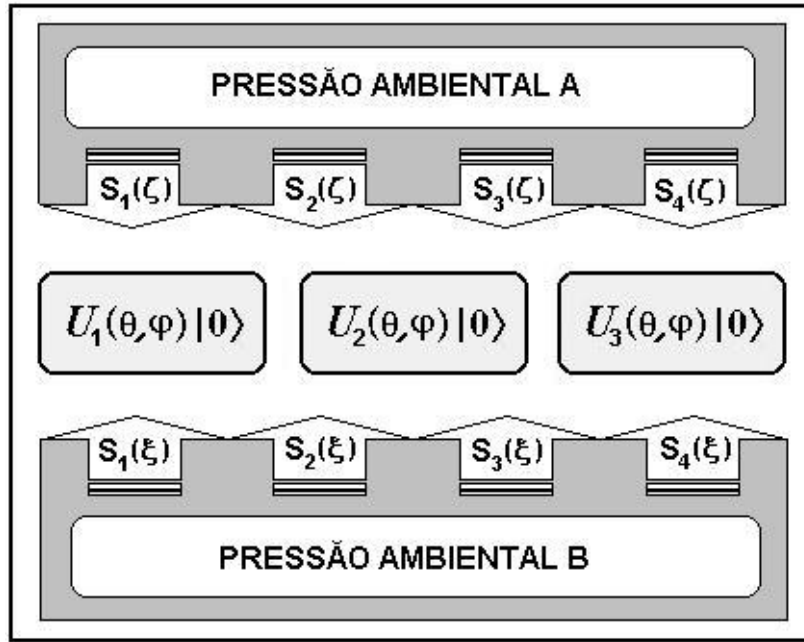


Figura 4.12: Representação da interpretação evolucionista da dinâmica de um jogo num sistema quântico.

Observamos que todas as condições de solução de jogo são mantidas com essa reinterpretação. Em nossas análises, avaliamos as melhores configurações ambientais, fixado o parâmetro fenotípico comum a dois indivíduos $|0_A\rangle$ e $|0_B\rangle$. Entretanto, poderíamos avaliar o inverso, considerando a *aptidão* de A e de B (que agora são os estados do sistema principal) em função de suas estratégias, ou seja:

$$\mathcal{F}_{A,B}(U_A, U_B) = \mathcal{F}_{A,B}(\{\theta_A, \varphi_A\}, \{\theta_B, \varphi_B\}) \quad (4.29)$$

Nesse caso, avaliariamos o desempenho dos indivíduos (A ou B) num certo contexto ambiental $\mathbf{S}(\varsigma)$, fixado o valor de ς .

Portanto, nossas análises foram feitas para um fenótipo particular $J(\chi)|0_A0_B\rangle$, onde o estudo voltou-se para as condições de vínculo χ entre os indivíduos contra as melhores condições ambientais que preservam a informação. Dada uma representação fenotípica (estudamos principalmente $\chi = \pi/2$) para dois indivíduos, analisamos as condições ambientais que garantiriam o melhor acúmulo de informação para esses indivíduos.

Capítulo 5

Modelos de Processamento e Otimização Sub-Neuronal de Informação

O modelo de Fröhlich é uma proposição ainda teórica. Contudo, os microtúbulos, componentes do citoesqueleto, têm ganhado grande atenção de muitos pesquisadores devido à íntima relação de suas propriedades biofísicas com o modelo de Fröhlich. Os microtúbulos são formados por uma rede de proteínas eletricamente carregadas apresentando um movimento oscilatório. Mas de modo geral, as relações dos microtúbulos com as células, principalmente os neurônios, ainda não são totalmente conhecidas. Algumas pesquisas têm proposto que os microtúbulos poderiam representar uma espécie de “sistema nervoso” da célula onde haveria um processamento de informação em nível sub-neuronal [76-80,110]. Outras, supõem a existência de efeitos quânticos relevantes nos microtúbulos no processamento cerebral [39-58,111]. Apontada a direção, o modelo de Fröhlich pode ser fundamental para a descrição dessa relevância dos efeitos quânticos num regime biológico. Por consequência, a teoria de jogos quânticos (TJQs) pode ser igualmente importante para o entendimento da otimização e do processamento de informação presente nesses processos biofísicos.

5.1 Microtúbulos

Os microtúbulos são a base da estrutura mecânica das células formando, com outras estruturas protéicas, o citoesqueleto. Os microtúbulos são cilindros ocos com diâmetro de $25nm$ onde a superfície exterior é formada por 13 trilhos de proteínas chamados protofilamentos. Os protofilamentos, por sua vez, são formados por uma série de “dímeros” de proteínas chamadas *tubulinas* com dimensão estimada em $4nm$. Ao longo dos protofilamentos estão agrupados pares de 2 tipos de tubulinas conhecidas como α e β (figura 5.1) cujo peso molecular de cada uma é aproximadamente de 55 kD (Daltons). Quando o monômero α , do par α - β , estiver eletricamente carregado diz-se que o par está no estado α ; quando β está carregado diz-se que o par está no estado β . A mudança conformacional de um estado para o outro depende do suprimento de energia no meio intra celular que determina a eletronegatividade de cada dímero [57-62].

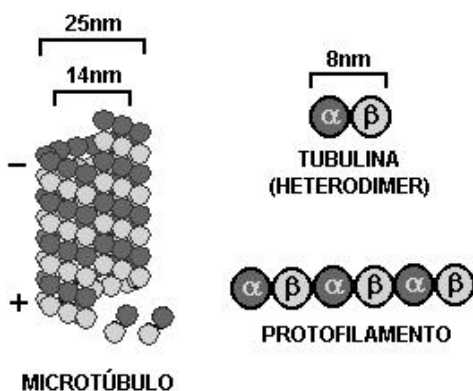


Figura 5.1: Representação de um microtúbulo, uma tubulina (heterodímero: α - β) e de um protofilamento.

Cada heterodímero pode ser fisicamente visto como um dipolo elétrico cujo caráter dipolar se origina da ligação de 18 íons de cálcio. Um número igual de cargas negativas, necessárias para o equilíbrio eletrostático, é localizado nas vizinhanças dos monômeros (como Cl e Mg) [57,58]. Dependendo das condições do meio, o microtúbulo como um todo transforma-se

num dipolo elétrico, onde o final (extremidade celular) é positivo e o início negativo (figura 5.1). Com essa configuração pode haver um ordenamento das moléculas de água dentro do cilindro ajudando na sustentação do momento de dipolo elétrico ao longo do microtúbulo [73-78].

O citoesqueleto muda continuamente sua forma e tamanho, a partir de uma intensa dinâmica que promove uma interação entre o exterior e o interior celular. Uma característica importante e intrigante dos microtúbulos é a capacidade de polimerização (crescimento) e despolimerização (decrecimento) chamada de *instabilidade dinâmica* [64-67]. Essa propriedade tem papel fundamental na organização, crescimento e funcionamento celular. Dentre essas funções, nos neurônios está o transporte de vesículas neurotransmissoras através de um mecanismo de chaveamento entre os microtúbulos e outras proteínas (*cinesina e dineína*) que “caminham” ao longo dos microtúbulos (figura 5.2) [24,38].

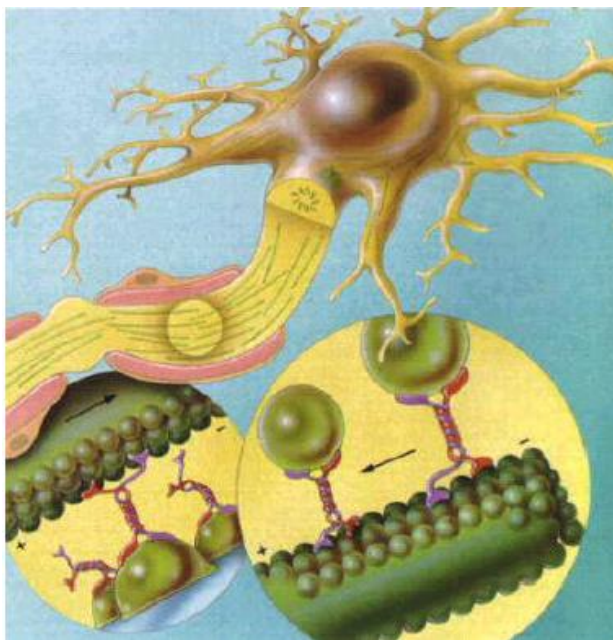


Figura 5.2: Esquema das proteínas cinesina e dineína sobre um microtúbulo neuronal mostrando o transporte das vesículas neurotransmissoras. Esse transporte é realizado por um mecanismo de chaveamento que ocorre a partir da liberação de energia de uma ATP ou GTP. (http://cellbio.utmb.edu/cellbio/microtubule_structure.htm)

A primeira fase de formação de um microtúbulo é chamada de “nucleação” (*nucleation*). Esse processo requer a associação das tubulinas com Mg^{++} , GTP (guanosina de trifosfato) e de uma temperatura próxima a $37^{\circ}C$. Esta fase é relativamente lenta até que o microtúbulo seja formado parcialmente. Então começa a segunda fase, chamada de “alongamento” (*elongation*) que ocorre muito mais rapidamente¹. Durante a nucleação, uma tubulina α e uma tubulina β se unem para formar um heterodímero (par α - β). Esse par se prende a outros dímeros para construir os protofilamentos onde cada dímero leva duas moléculas de GTP. Quando um heterodímero se liga ao microtúbulo o GTP da tubulina β é hidrolizado em GDP (guanosina de difosfato), liberando energia. Enquanto o GTP da tubulina α se incorpora à estrutura do microtúbulo. A energia produzida pela hidrolização de GTP em GDP ainda não é totalmente compreendida mas pesquisas mostram que ela ajuda na mudança da conformação dos heterodímeros, ou que pode ainda ser estocada na forma de tensão mecânica ou ainda transformada em vibração [24,26,110].

Alguns trabalhos vêm mostrando que os microtúbulos possuem propriedades piezoelétricas que podem ser importantes no transporte de informação a partir da membrana celular para o núcleo celular (e vice-versa). Outros trabalhos sugerem que os microtúbulos poderiam ser processadores de informação sub-celular [72-80,112]. A informação seria não apenas transferida de um ponto a outro mas também processada segundo algum critério [39-45].

5.2 Modelos Biofísicos e Estoque de Informação nos Microtúbulos

A descrição matemática da dinâmica biofísica dos microtúbulos vem sendo aprimorada e estudada exaustivamente. Sataric *et al* propuseram um Hamiltoniano clássico com um potencial quártico na presença de um campo elétrico externo [72-75]. Contudo, considerando

¹A vida média de um microtúbulo é de 10 a 20 minutos [26].

apenas as mudanças conformacionais das tubulinas, dadas pela energia liberada da hidrólise da GTP, o potencial nesse processo pode ser escrito como [24,78,112]

$$V(u_n) = A(T - T_c) \frac{u_n^2}{2} + B \frac{u_n^4}{4}, \quad (5.1)$$

onde u_n é a coordenada da mudança conformacional da n -ésima tubulina, A e B são parâmetros (positivos) do modelo, T é a temperatura do sistema e T_c é uma temperatura crítica que mede possíveis transições de fase no conjunto estatístico de tubulinas (figura 5.3).

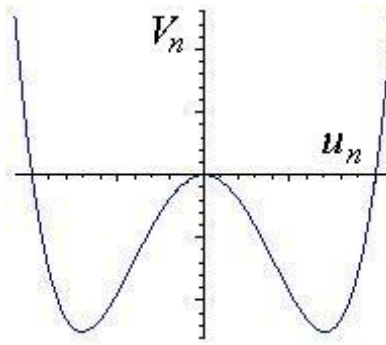


Figura 5.3: Potencial quártico que modela os níveis de conformação da tubulina.

A temperatura T_c é estimada teoricamente considerando-se os vínculos com o ambiente. Tuszyński *et al* apresenta um modelo da T_c independente de um campo elétrico externo na forma [78-80]

$$T_c = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right), \quad (5.2)$$

onde ϵ é a permicividade da tubulina no citosol, p é momento de dipolo dos estados conformacionais da tubulina e ϵ_0 , p_0 e T_0 são parâmetros do modelo estimados em 1, 192 Debye e 310K, respectivamente [79].

As principais questões levantadas no modelo [78-80,112] são:

- Considerando os microtúbulos como uma rede de dipólos, é possível fazer um tratamento estatístico sobre as orientações das tubulinas em relação a temperatura?

- Desse tratamento podemos prever se os microtúbulos são capazes de estocar informação? Em que regime de temperatura o estoque seria ótimo?
- Os microtúbulos são capazes de processar informação? Em que regime de temperatura o processamento seria ótimo?

Tuszyński [78-801] apresentou um modelo estatístico de transição de fase no arranjo das tubulinas onde mostrou que a baixa temperatura ($\sim 200K$) todas as tubulinas apresentam mesma orientação dipolar (ordem: fase tipo ferroelétrica); a altas temperaturas ($\sim 400K$) todas as tubulinas apresentam total desorientação dipolar (desordem: fase tipo paraelétrica). Além disso, dependendo da estrutura de ligação inicial das tubulinas ao longo do microtúbulo², existe um valor crítico próximo a $300K$ em que aparecem domínios de ordenamento dipolar (fase tipo spin-glass). Esse valor crítico pode ser estimado a partir de (5.2). Essa expressão fornece uma escala de transição de fase de acordo com a temperatura, em função das propriedades internas do microtúbulo (figura 5.4).

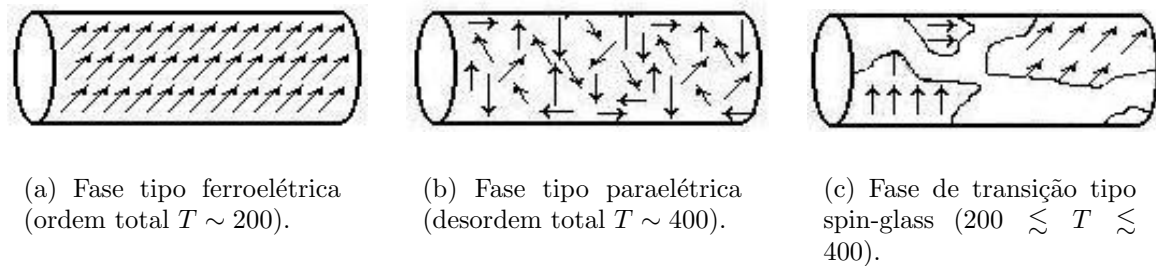


Figura 5.4: Esquema representando as possíveis fases num modelo estatístico da distribuição do momento de dipólo das tubulinas sobre os microtúbulos.

O principal resultado desse modelo foi mostrar que as tubulinas podem apresentar um arranjo conformacional ordenado ao longo do microtúbulo à temperatura próxima do corpo humano. Além de se explicitar propriedades piezoelétricas dos microtúbulos [78–80]. Desta

²Existem duas estruturas básicas chamadas de lattice-A, no qual os heterodímeros se ligam num formato espiral ao longo do microtúbulo e lattice-B, no qual os heterodímeros se ligam num formato paralelo.

forma, a partir desse modelo biofísico clássico é possível medir a capacidade de estoque de informação dos microtúbulos assumindo uma distribuição adequada da energia.

A partir do potencial (5.1) nós assumimos uma aproximação da energia das tubulinas dependente da polarização média de cada uma. Assim, da teoria de transição de fase de Landau, a energia total do sistema pode ser escrita classicamente como [78,113]

$$E = \left(\frac{a}{2} \wp^2 + \frac{b}{4} \wp^4 \right) N_0, \quad (5.3)$$

onde \wp é uma variável contínua que representa a polarização de cada tubulina (associada a sua conformação), N_0 é o número de tubulinas. O parâmetro a depende linearmente da temperatura por $a = \bar{a}(T - T_c)$, com $\bar{a} > 0$ e $b > 0$. A energia E é minimizada por $\wp = 0$, com $T > T_c$, e por $\wp = \pm \sqrt{-\bar{a}(T - T_c)/b}$, com $T < T_c$. Usando uma distribuição de Boltzmann $g(\wp)$ para a polarização do sistema, temos

$$g(\wp) = Z^{-1} \exp(-E/kT), \quad (5.4)$$

onde Z é o fator de normalização, k é a constante de Boltzmann, T a temperatura e E a energia do sistema. Considerando uma única tubulina, substituímos (5.4) em (5.3), tal que

$$g(\wp) = Z^{-1} \exp \left(\frac{\bar{a}(T - T_c)}{2kT} \wp^2 + \frac{b}{4kT} \wp^4 \right). \quad (5.5)$$

Sem nenhuma perda de generalidade, essa expressão nos permite calcular a capacidade de estoque de informação ao longo de um microtúbulo³. Para isso, como \wp é uma variável contínua, precisamos tomar a forma contínua da média da Informação de Shannon, definida por

$$\langle I \rangle = - \int \log_2(p) dp, \quad (5.6)$$

Substituindo p por $g(\wp)$ obtemos a expressão da capacidade de estoque de informação:

$$\langle I \rangle = \log_2(Z) - \frac{\bar{a}(T - T_c)}{2kT \ln 2} \langle \wp^2 \rangle - \frac{b}{4kT \ln 2} \langle \wp^4 \rangle. \quad (5.7)$$

³Podemos pensar que $g(\wp)$ representa a distribuição de probabilidade ao longo das paredes do microtúbulo.

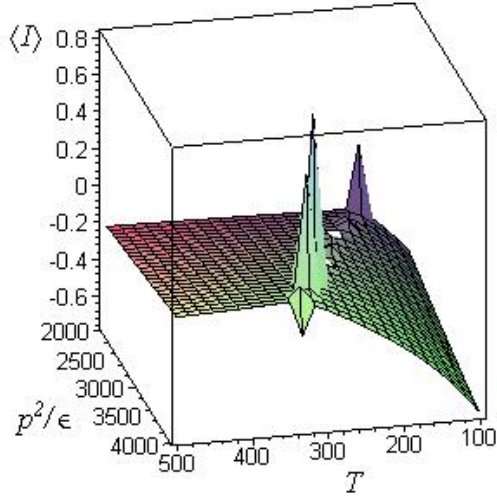
onde a média de \wp sobre todos os possíveis valores é dado por

$$\langle \wp^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g'(\wp) \wp^n d\wp. \quad (5.8)$$

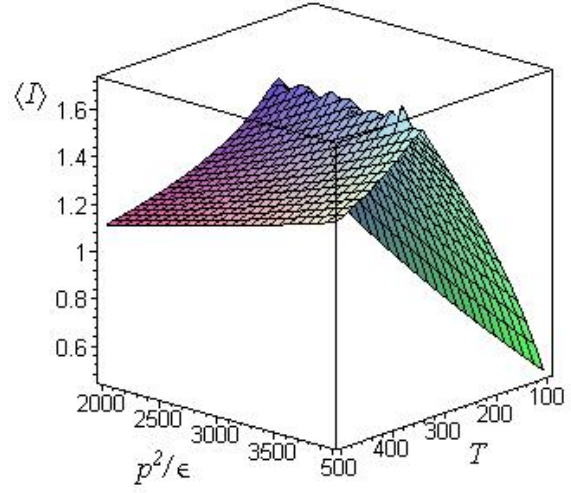
Substituindo então a expressão (5.2) em (5.7) conseguimos plotar a capacidade de informação em função da temperatura T contra p^2/ϵ , para alguns valores de \bar{a} e b :

Através desses gráficos (figuras 5.5(a) a 5.5(c)) podemos estimar os melhores valores de p^2/ϵ para uma T perto de $310K$. Esses resultados coincidem com os resultados obtidos em [78], que mostram que numa temperatura próxima da fisiológica, com $p^2/\epsilon \sim 3600$ Debye², pode existir um modo de estoque de informação nos microtúbulos. Essa característica dos microtúbulos seria fundamental para descrição de um processamento de informação sub-neuronal. Além de reforçar a relevância da informação como parâmetro de otimização num sistema biofísico.

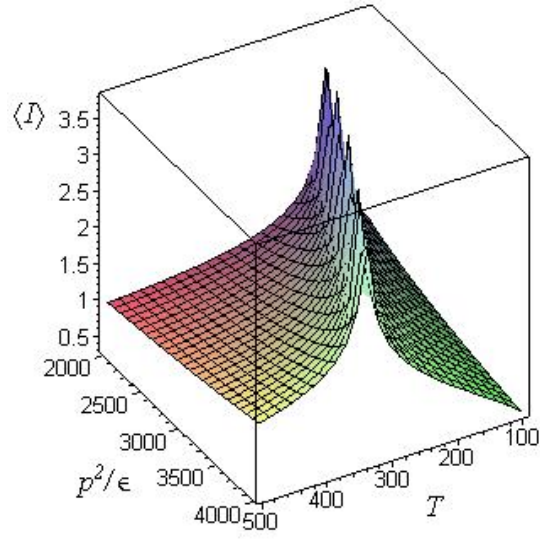
Apresentada a capacidade de armazenamento de informação nos microtúbulos, podemos nos perguntar sobre a possibilidade de haver algum tipo de transmissão dessa informação. Para essa questão precisamos descrever, além da forma de armazenamento, a forma de propagação da informação. De acordo com as análises anteriores, o regime de temperatura que apresenta maior possibilidade de estoque de informação é a fase tipo spin-glass. Do ponto de vista termodinâmico esta é realmente a fase que apresenta a melhor configuração. Seguindo [78,79], se assumirmos o surgimento de domínios locais na fase spin-glass, onde existe um ordenamento local dos dipólos (figura 5.4), poderemos pensar numa representação simbólica para cada domínio e uma comunicação entre eles. Desse modo, o campo elétrico gerado por cada arranjo dipolar de cada domínio seria o mediador dessa troca de informação ao longo das paredes dos microtúbulos. Baseando-se nesse procedimento é possível calcular a capacidade de transferência de informação ao longo dos microtúbulos na fase spin-glass. Assim, considerando cada par de domínio como um canal de comunicação, em [112] mostra-se os valores de temperatura e frequência para uma comunicação ótima.



(a) $\bar{a} = 0.5 \times 10^{-5}, b = 0.5$



(b) $\bar{a} = 0.5 \times 10^{-6}, b = 0.5 \times 10^{-3}$



(c) $\bar{a} = 0.5 \times 10^{-6}, b = 0.5 \times 10^{-8}$

Figura 5.5: Estoque de informação num microtúbulo em função da temperatura e polaridade.

5.3 Microtúbulos x Modelo Fröhlich

No modelo de Fröhlich um conjunto de dipólos sujeitos a ação de um campo eletromagnético sofre excitações conformacionais coerentes, caso haja um suprimento de energia adequado. Esta energia provém de reações bioquímicas e térmicas fornecidas pelo meio ambiente. Numa faixa de oscilação da ordem de $GHz - THz$ haveriam estados quânticos coerentes que Fröhlich chamou de transições acústico-conformacionais (fônons) - os análogos do condensado de Bose-Einstein⁴. Dessas relações, poderiam emergir processos cooperativos e auto-organização.

Desta forma, fica evidente a estreita relação entre a dinâmica biofísica dos microtúbulos, como os apresentados na seção anterior, com o modelo de Fröhlich (figura 5.6). Alguns trabalhos têm confirmado experimentalmente faixas de frequência de oscilação das tubulinas compatíveis com as de Fröhlich [106-108]. Porém, ainda não se mediu experimentalmente qualquer tipo de efeito quântico nos microtúbulos mas muitos pesquisadores estão empenhados nessa direção. Essa descoberta seria surpreendentemente importante e fundamental para a compreensão do intrincado sistema celular.

5.4 Microtúbulos x Funções Cerebrais

Um dos trabalhos que ganhou maior notoriedade (e críticas), relacionando a biofísica dos microtúbulos neuronais com a proposta de Fröhlich, foi o de Roger Penrose e Stuart Hameroff [39-58]. Eles desenvolveram um modelo quântico do cérebro que considera o citoesqueleto dos neurônios como componente fundamental no processamento cerebral. Nesse modelo, os

⁴A principal diferença é que o condensado de Bose-Einstein é adquirido reduzindo-se a temperatura do sistema, enquanto no modelo de Fröhlich a coerência é adquirida fixando-se a temperatura e aumentando-se a frequência.

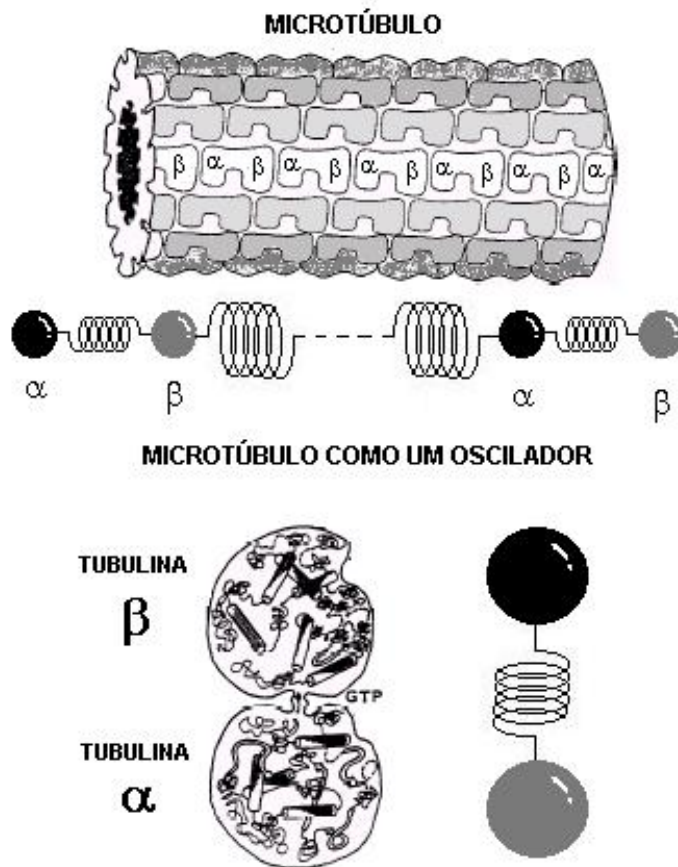


Figura 5.6: Esquematisação da descrição de um microtúbulo como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados como no modelo de Fröhlich.

microtúbulos executariam um tipo de computação quântica através das tubulinas, num procedimento tipo autômatos celulares. Através dessa computação quântica, ou processamento de informação quântico, funções mentais de alto nível como a própria consciência humana emergiriam no cérebro. Essa emergência ocorreria em ciclos que começam com o surgimento de superposições quânticas nas tubulinas, passando pela sustentação dessas superposições (onde acontece o processamento de informação) e finalizando-se com o colapso dos estados. Esses ciclos ocorreriam de maneira coordenada por todo o cérebro num processo que eles chamaram de “redução objetiva orquestrada” (*Objective Orchestrated Reduction*) ou, Orch OR (Apêndice C).

Esse modelo recebeu muitos adeptos [50-56] mas também diversas críticas [56,57,58,111, 114,115], tanto pela parte biofísica quanto pela parte quântica apresentada. O principal ponto crítico do modelo de Penrose-Hameroff é a associação de efeitos quânticos com efeitos gravitacionais. Penrose tenta de maneira informal juntar a Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein [116,48,49]. Além disso, propõe que essa unificação gera uma dinâmica não-computável que seria a resposta para a emergência da consciência humana [47].

5.5 Condições Físicas para Construção de um Modelo Quântico de Otimização Sub-Neuronal da Informação

Qualquer tratamento físico, ou mais especificamente quântico, no cérebro é imprecindível a consideração do não-isolamento físico. Dessa falta de isolamento, o cérebro troca calor com o ambiente a todo momento, num ciclo constante de perda e suprimento de energia. Esta consideração é a principal fonte de críticas na hipótese de efeitos quânticos no cérebro. Isto porque o cérebro não possuiria, em tese, condições físicas para sustentar a coerência por tempos relevantes para haver qualquer tipo de processamento.

Se confrontarmos a teoria da descoerência com a Orch OR veremos que os valores de duração da superposição quântica variam bastante. Num artigo polêmico Max Tegmark fez duras críticas ao modelo de Penrose-Hameroff ao calcular os tempos de sustentação da coerência quântica nos microtúbulos a partir da teoria de descoerência [114]. Refazendo esses cálculos é possível mostrar que apesar da diferença entre os tempos calculados, pelo método de Penrose-Hameroff e pela teoria de descoerência, concluímos que não é necessariamente preciso descartar a possibilidade de efeitos quânticos no cérebro [111]. Entendemos que se

o modelo de Fröhlich for bem aplicado, talvez haja a possibilidade de reformularmos alguns dos fundamentos do modelo de Penrose-Hameroff por um modelo que se enquadre melhor às teorias vigentes.

O primeiro passo nessa reformulação é usar uma metodologia adequada que descreva as relações entre um sistema quântico e o ambiente. Um bom formalismo para essa descrição é o das Operações Quânticas (OQs). O segundo passo é encontrar um Hamiltoniano que descreva as propriedades biofísicas dos microtúbulos e sua interação com o ambiente (para que possamos aplicar as OQs). Como argumentamos, o Hamiltoniano do modelo de Fröhlich é um excelente candidato para modelar a dinâmica biofísica dos microtúbulos. Além disso, aplicando a Teoria de Jogos Quânticos (TJQs) no modelo de Fröhlich poderemos construir um critério de otimização natural dos estados quânticos em nível sub-neuronal. A partir dessa reestruturação podemos analisar a proposta de Penrose, introduzindo efeitos quânticos no cérebro, a partir da teoria de descoerência.

5.5.1 Condições: Taxas de Descoerência

Penrose e Hameroff calcularam o número de tubulinas em superposição a partir da resposta típica do cérebro à estímulos externos. Esse tempo foi estimado por $500ms$. A energia crítica correspondente à OR (*Orchestred Reduction* - Apêndice B) é relacionada com o tempo t a partir do princípio da incerteza $E \simeq \hbar/t$. Aproximando as tubulinas por esferas, Penrose e Hameroff calcularam a energia crítica de sustentação da coerência das massa das tubulinas a partir da auto-energia gravitacional [39]:

$$E = nNG \frac{m^2 s^2}{r} \left(1 - \frac{3s}{8r} + \frac{s^3}{80r^3} \right), \quad (5.9)$$

onde n é o número de tubulinas, N é o número de átomos em cada tubulina, G é a constante gravitacional, m a massa da esfera, r é o raio da monômero esférico e s é máxima separação

espacial da posição de uma esfera em superposição. Com essa estimativa o número de tubulinas envolvidas na OR é 10^9 . Considerando que um neurônio tem em média 10^7 tubulinas e assumindo que entre 10% e 1% das tubulinas de cada neurônio estão envolvidas eles estimaram que 1000 a 10000 neurônios sustentam coerência por $500ms$. Como o córtex humano tem cerca de 10^{10} neurônios somente uma pequena fração de neurônios estão envolvidos (de $1/10^7$ a $1/10^6$) no processo.

- **Estimativa: descoerência pela interação íon-íon e íon-dipólo**

M. Tegmark estimou que o tempo de coerência num sistema físico como os neurônios seria da ordem de $10^{-20}s$ e para as tubulinas na ordem de $10^{-13}s$. Sua conclusão é que esses tempos não são suficientes para haver qualquer tipo de processamento quântico de informação no cérebro [114,115]. Para o cálculo da coerência nos microtúbulos, Tegmark considera um íon se propagando ao longo do eixo z do microtúbulo conforme figura 5.7. O íon representa a carga total ao redor do microtúbulo devido a presença de íons de cálcio. Essa distribuição de carga interage com o microtúbulo através de um potencial Coulombiano. A descoerência é produzida por um termo de segunda ordem a partir da expansão do potencial. A expressão derivada por M. Tegmark para calcular o tempo de descoerência no microtúbulo devido a interação com o íon (ambiente) é dada por [114]

$$\tau = \frac{d^3 \sqrt{MkT}}{\mathbb{k} N e^2 s}, \quad (5.10)$$

onde \mathbb{k} é a constante de Coulomb, d é a distância entre a tubulina e o íon, M é a massa do íon, N é o número de cargas elementares no microtúbulo, s é a máxima separação espacial de um estado superposto, e é a carga do elétron, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema. Usando os valores considerados em [114] $\mathbb{k} = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, $k = 1.3806568 \times 10^{-23} J K^{-1}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} C$, $T = 309K$, $M = 18 \times 1.67 \times 10^{-27} kg$ (número

de massa de um íon de água \times unidade de massa atômica), $N = 10^3$ e assumindo d e s na ordem de 10^{-7} - $10^{-9}m$ (ordem do diâmetro do microtúbulo) na expressão (5.10) encontramos um valor da ordem de $10^{-15}s$.

Num artigo em resposta a M. Tegmark, S. Hagan, S. Hameroff and J. Tuszyński [39] discordam dos valores do tempo de coerência referentes às tubulinas. Para eles, um dos principais erros no modelo de Tegmark é considerar um potencial Coulombiano. Modelando uma tubulina como um dipólo e usando um potencial dipolar eles chegam na expressão

$$\tau = \frac{d^4 \sqrt{MkT}}{3\epsilon p s} \Omega_{dip}, \quad (5.11)$$

onde p é o momento de dipólo, Ω_{dip} é um fator geométrico envolvendo o ângulo da linha entre o íon e o dipólo, assumido igual a 1. As demais variáveis são análogas a expressão (5.10). Por essa expressão os autores reivindicam que, usando os valores de Tegmark com $p = 10^{-27} Cm$, o tempo de coerência é da ordem de $10^{-6}s - 10^{-4}s$.

Contudo, uma crítica pertinente, tanto para a equação (5.10) quanto para a equação (5.11), é a relação do aumento do tempo de coerência proporcional a raiz quadrada da temperatura. S. Hagan, S. Hameroff and J. Tuszyński [39] percebem esse problema na formulação de Tegmark mas, ao introduzirem o potencial dipolar, reproduzem a mesma questão. Da formulação geral de descoerência, o tempo de coerência deve diminuir com o aumento da temperatura⁵ [104]. Deste modo, é possível mostrar que as expressões (5.10) e (5.11) são dependentes das considerações na expansão do potencial que descreve a interação.

Para discutir a equação (5.10) consideramos um potencial $V(r)$, descrevendo uma interação Coulombiana, entre a posição de uma partícula 1 (no microtúbulo) com um íon (partícula 2 representando o ambiente). Usando ρ para representar o estado (posição) das partículas temos

⁵Estados macroscópicos, como na supercondutividade, ocorrem para temperaturas próximas a 0^0C .

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2', t) = \rho(0) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(V(\vec{R}) - V(\vec{R}') \right) t \right], \quad (5.12)$$

onde $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $\vec{R}' = \vec{r}_1' - \vec{r}_2'$ representam a variação da posição das partículas (figura 5.7).

Na representação matricial a descoerência anula os termos da diagonal secundária da matriz da partícula 1 devido a interação com a partícula 2. Se o sistema conjunto é escrito inicialmente num produto tensorial $\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2', t) = \rho_1 \otimes \rho_2$, tomando o traço no ambiente, obtemos

$$\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \text{Tr}_2 (\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2', t)) = \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) \exp(-\Gamma t). \quad (5.13)$$

Ou seja, a parte não-diagonal, que representa as superposições do sistema, se anula quando $t > \Gamma^{-1}$. Para obtermos esse resultado escolhemos

$$\vec{r}_1 = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_1' = (s, y_1, z_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, d, 0). \quad (5.14)$$

A coordenada \vec{r}_2 significa que o íon (ambiente) se move ao longo do eixo-x a uma distância d constante.

Portanto

$$\vec{R} = \vec{r}_2, \quad \vec{R}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1'. \quad (5.15)$$

Expandindo agora o potencial de Coulomb $V(\vec{R}')$ até segunda ordem temos:

$$V(\vec{R}') = \mathbb{k} q_1 q_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1'|} \simeq \mathbb{k} q_1 q_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2|} + \frac{s x_2 + y_1 d}{|\vec{r}_2|^3} \right). \quad (5.16)$$

Logo:

$$V(\vec{R}') - V(\vec{R}) = \mathbb{k} q_1 q_2 \left(\frac{s x_2 + y_1 d}{|\vec{r}_2|^3} \right), \quad (5.17)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas das partículas 1 e 2.

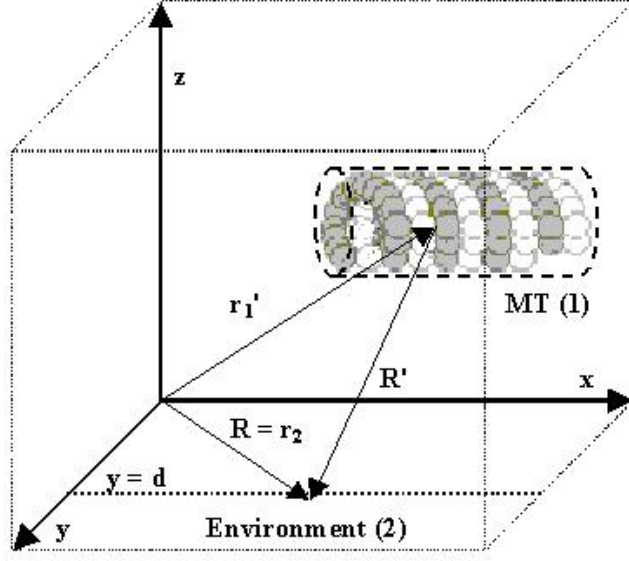


Figura 5.7: Esquema das coordenadas de uma tubulina num microtúbulo em relação a um ponto no ambiente.

Assumindo agora uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\sqrt{2}\vartheta$ para a partícula 2, escrevemos

$$\rho_1 = \frac{\rho_1(0)}{\sqrt{4\pi\vartheta}} \int \exp \left[-\left(\frac{x_2}{2\vartheta}\right)^2 - \frac{\mathbb{K}q_1q_2}{i\hbar} \left(\frac{sx_2 + y_1d}{(x_2^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \right] dx_2. \quad (5.18)$$

Para $d \gg x_2$ podemos aproximar $(x_2^2 + d^2)^{\frac{3}{2}} \simeq d^3$, tal que com um algebrismo a expressão (5.18) se reduz a:

$$\rho_1 = \frac{\rho_1(0)}{\sqrt{4\pi\vartheta}} \exp \left[\frac{ity_1\mathbb{K}q_1q_2}{\hbar d^2} - \left(\frac{ts\vartheta\mathbb{K}q_1q_2}{\hbar d^3}\right)^2 \right] \Phi, \quad (5.19)$$

com

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\left(\frac{x_2}{2\vartheta} + \frac{its\vartheta\mathbb{K}q_1q_2}{\hbar d^3}\right)^2 \right] dx_2. \quad (5.20)$$

Em (5.19), a integral Φ produz um número constante, o termo imaginário na exponencial é um fator de fase, enquanto o termo quadrático gera o decrescimento dos termos não diagonais da matriz densidade, caracterizando o tempo de descoerência ($\tau = \Gamma^{-1}$):

$$\tau = \frac{\hbar d^3}{s\vartheta\mathbb{K}q_1q_2}. \quad (5.21)$$

Se assumirmos, como Tegmark [114], um vínculo térmico para a energia na forma $(\Delta P)^2/M \lesssim kT$, escrevemos o princípio da incerteza como $\Delta x \sim \hbar/\sqrt{MkT} = \vartheta$. Além disso, para $q_1 = q_2 = e$ resgatamos a expressão (5.10).

O termo \sqrt{kT} no numerador de (5.10) depende da aproximação usada $\vartheta \leq d$ e $x_2 \ll d$. Contudo, se dermos uma liberdade maior para a representação do íon ambiental de tal forma que a descoerência apareça efetivamente com a aproximação $x_2 = \vartheta \gg d$, a situação em (5.18) muda:

$$\rho_1 = \frac{\rho_1(0)}{\sqrt{4\pi\vartheta}} \int \exp \left[-\frac{1}{4} - \frac{\mathbb{k}q_1q_2}{i\hbar} \left(\frac{s\vartheta + y_1d}{(\vartheta^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] dx_2. \quad (5.22)$$

Se a parte imaginária na integral (5.22) oscilar muito rapidamente o termo de descoerência aparecerá para [111]

$$t \gg \frac{\hbar}{\mathbb{k}q_1q_2} \frac{(\vartheta^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}{s\vartheta + y_1d} \simeq \frac{\hbar}{\mathbb{k}q_1q_2} \frac{\vartheta^2}{s}. \quad (5.23)$$

Considerando $\vartheta = \hbar/\sqrt{MkT}$, o fator kT vai para o denominador diferentemente das expressões (5.10) e em concordância com a experiência:

$$\tau = \frac{1}{\mathbb{k}q_1q_2} \frac{\hbar^2}{sMkT}. \quad (5.24)$$

O ponto é que para baixas temperaturas o fator ϑ se torna muito grande e aproximação usada na equação (5.10) não funciona. Deste modo, a crítica de Hagan, Hameroff and Tuszyński contra a expressão de Tegmark não é totalmente legítima. Para haver total análise deve-se considerar todos os regimes de aproximação.

Da mesma maneira, para discutir a expressão (5.11), no caso de uma interação dipólo-íon, realizamos o mesmo procedimento tomado para a interação íon-íon. Assim, considerando a expansão do potencial de interação entre um dipólo p (tubulina: partícula 1) e um íon q (ambiente: partícula 2) temos

$$V(\vec{R}) = \mathbb{k}q \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \simeq \mathbb{k}q \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}_2 |\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|^4} \right). \quad (5.25)$$

Assumindo todas as considerações prévias de cálculo, escrevemos o estado do sistema como

$$\rho_1 = \frac{\rho_1(0)}{\sqrt{4\pi}\vartheta} \int \exp \left[- \left(\frac{x_2}{2\vartheta} \right)^2 - \frac{3 |\vec{r}_1| \mathbb{k}q}{i\hbar} \left(\frac{p_x x_2 + p_y d}{(x_2^2 + d^2)^2} \right) t \right] dx_2, \quad (5.26)$$

para $\rho_1 = \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$. Considerando o regime onde $d \gg x_2$ aproximamos $(x_2^2 + d^2)^2 \simeq d^4$, gerando a expressão (5.11):

$$\tau = \frac{\hbar d^4}{3 |\vec{r}_1| \mathbb{k}q p_x \vartheta} = \frac{d^4 \sqrt{MkT}}{3 \mathbb{k}q p_s} \Omega_{dip}, \quad (5.27)$$

onde $p_x = p \cos \alpha$ com $\Omega_{dip} \equiv \sec \alpha$ e $|\vec{r}_1| \equiv s$ e $\vartheta = \hbar/\sqrt{MkT}$. Mas se considerarmos $x_2 = \vartheta \gg d$, teremos:

$$\tau = \frac{\hbar^4 (MkT)^{-\frac{3}{2}}}{3 \mathbb{k}q p_s} \Omega_{dip}. \quad (5.28)$$

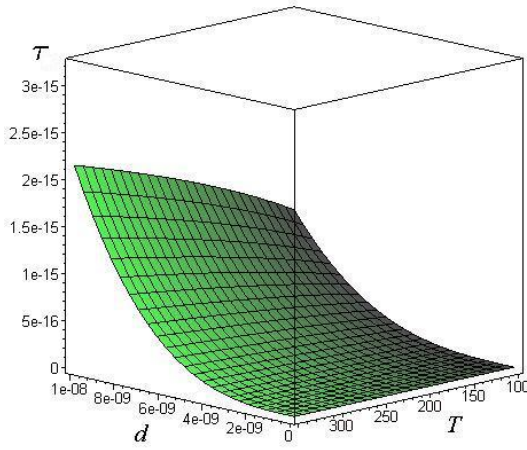
Ou seja, a expressão (5.28) mostra que para temperaturas muito baixas, no caso de uma interação dipólo-ambiente, existe compatibilidade com a experiência de tempos de coerência mais altos. Nossos resultados do tempo de descoerência usando a expressão (5.21) é da ordem de 10^{-15} e usando a expressão (5.27) é da ordem de 10^{-16} como mostrado nas figuras 5.8(a) e 5.8(b).

E usando (5.24) e (5.28) chegamos nas ordens de descoerência 10^{-13} , variando-se s , como mostrado nas figuras 5.9(a) e 5.9(b).

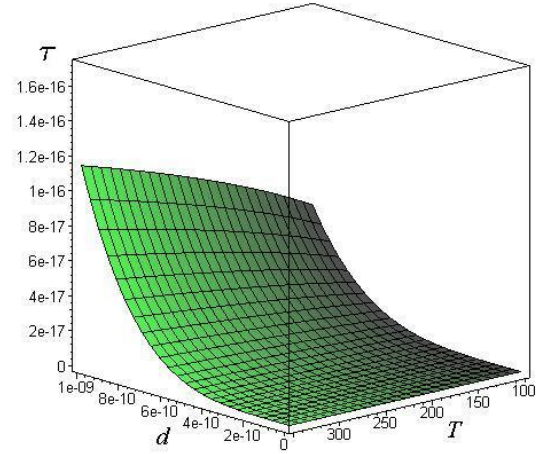
Nossos resultados mostram que o tempo de coerência não é tão baixo quanto calculado por [39] nem tão alto quanto calculado por [114]. Na verdade, dependendo dos valores das distâncias envolvidas e do ajuste de parâmetros do modelo podemos conseguir tempos de coerência bastante relevantes.

• Estimativa: descoerência pelo modelo de Fröhlich

A mesma estimativa sobre o tempo de descoerência pode ser feita considerando o modelo de Fröhlich. Lembrando que neste caso um microtúbulo representa um conjunto de

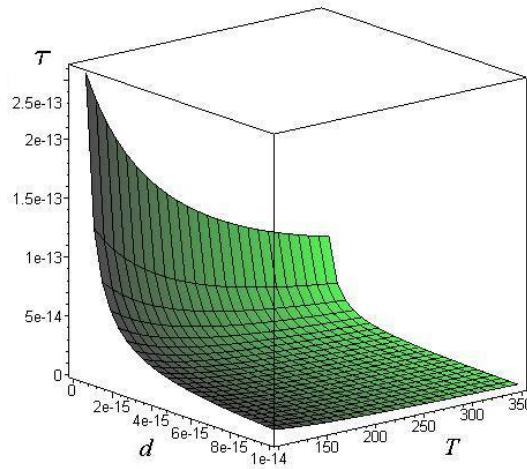


(a) Modelo de interação íon-íon.

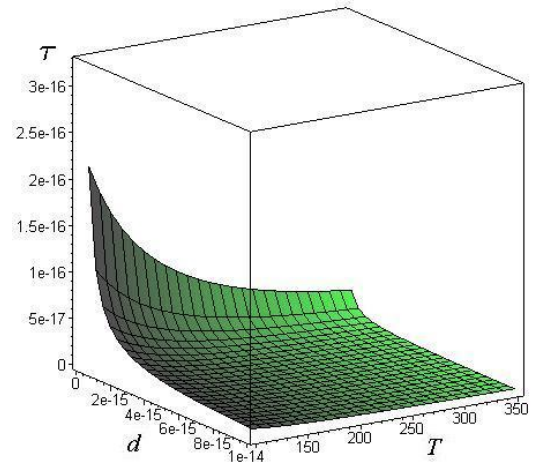


(b) Modelo de interação íon-dipólo.

Figura 5.8: Tempo de descoerência com regime de temperatura proporcional ao tempo de superposição.



(a) Modelo de interação íon-íon.



(b) Modelo de interação íon-dipólo.

Figura 5.9: Tempo de descoerência com regime de temperatura inversamente proporcional ao tempo de superposição.

osciladores harmônicos acoplados ao ambiente, que também é modelado por um conjunto de osciladores harmônicos.

Para essa estimativa precisamos caracterizar o efeito da descoerência no formalismo de OQs. Desse modo, sendo γ a probabilidade de um ruído quântico do tipo amortecimento de fase, supondo que durante um intervalo de tempo Δt a probabilidade γ ocorra numa taxa constante Γ_d , tal que $\gamma = \Gamma_d \Delta t \ll 1$. Essas considerações descrevem o efeito de um canal de amortecimento de fase (CQAF) no tempo. Para um estado geral $\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|$, após n aplicações do CQAF, teremos

$$\rho_{rs} \xrightarrow{\mathfrak{S}^n} (1 - \gamma)^n \rho_{rs}, \quad (5.29)$$

para $r \neq s$. Considerando também que a evolução temporal do sistema está relacionada pela aplicação do canal $\mathfrak{S}(\cdot)$ por $t = n\Delta t$, temos que

$$(1 - \gamma)^n = (1 - \Gamma_d \Delta t)^{t/\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} e^{-t\Gamma_d}. \quad (5.30)$$

Portanto, após um tempo $t \gg \Gamma_d^{-1} = \tau_d$, o estado superposto decai ($\gamma : \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \rightarrow |x\rangle$ ou $|y\rangle$) exponencialmente na forma

$$\gamma = 1 - e^{-t/\tau_d}, \quad (5.31)$$

caracterizando o efeito de descoerência no formalismo de OQs. Se considerarmos o princípio de incerteza, $t \approx \hbar/E$ podemos relacionar a probabilidade de ruído γ com a energia do sistema, por

$$\tau_d = -\frac{\hbar}{\ln(1 - \gamma)E_{TB_2}}, \quad (5.32)$$

onde E_{TB_2} é a energia do sistema associada ao acoplamento de segunda ordem com o ambiente.

- *Cálculo da Energia*

Para calcularmos a energia E_{TB_2} tomaremos uma extensão do Hamiltoniano H_{TB_2} considerando também o termo de oscilação livre do ambiente, de tal forma que

$$H'_{TB_2} = \sum_l \sum_i \sum_j \hbar \xi (a_l^\dagger a_i b_j^\dagger + a_l^\dagger a_i b_j) + \sum_j \hbar \nu_j b_j^\dagger b_j. \quad (5.33)$$

Observamos que acrescentando o termo de oscilação livre do ambiente enriquecemos o modelo sem afetar o vínculo com o sistema principal. Considerando apenas um sub-sistema de oscilação comum x , escrevemos

$$\begin{aligned} H'_{TB_2} &= \hbar \xi (a_x^\dagger a_x b_x^\dagger + a_x^\dagger a_x b_x) + \hbar \nu_x b_x^\dagger b_x \\ &\equiv \hbar \xi (a^\dagger a b^\dagger + a^\dagger a b) + \hbar \nu b^\dagger b. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Adotando agora uma distribuição de Boltzmann para o estado do sistema conjunto (sistema principal mais ambiente), temos

$$\rho = \exp(-H'_{TB_2}/kT)/Z, \quad (5.35)$$

onde T é a temperatura do sistema, k a constante de Boltzmann e, da condição $\text{tr}(\rho) = 1$, a função de partição Z é dada por $Z = \text{tr}(\exp(-H'_{TB_2}/kT))$. Desta forma, seguindo [103], a energia E_{TB_2} é dada por

$$E_{TB_2} = \text{tr}(\rho H'_{TB_2}) = Z^{-1} \text{tr}(H'_{TB_2} \exp(-H'_{TB_2}/kT)). \quad (5.36)$$

Como H'_{TB_2} , não faz referência ao espaço da fonte de calor, tomamos apenas a base $\{|\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_k\rangle\}$, tal que

$$\begin{aligned} E_{TB_2} &= Z^{-1} \sum_{nm} \langle \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m | (H'_{TB_2} \exp(-H'_{TB_2}/kT)) | \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m \rangle \\ &= Z^{-1} \sum_{nm} \langle \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m | (\hbar \xi (a^\dagger a b^\dagger + a^\dagger a b) + \hbar \nu b^\dagger b) \times \\ &\quad \exp(- (\hbar \xi (a^\dagger a b^\dagger + a^\dagger a b) + \hbar \nu b^\dagger b) /kT) | \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m \rangle. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Da relação de BCH (3.7) [45] temos que para uma constante α e dois operadores \mathbf{A} e \mathbf{B} quaisquer vale

$$\exp(\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B})) \approx \exp(\mathbf{A}\alpha) \exp(\mathbf{B}\alpha) + O(\alpha^2), \quad (5.38)$$

com $O(\alpha^2) \sim \exp(-\alpha^2 [\mathbf{A}, \mathbf{B}] / 2)$. Como nosso maior interesse é estudar a aplicação do modelo de JQs, assumiremos uma aproximação de primeira ordem em (5.37). Veremos que mesmo com essa linearização o modelo se mostrará extremamente eficiente. Desta forma, a energia fica

$$\begin{aligned} E_{TB_2} \approx Z^{-1} \sum_{nm} \langle \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m | & \left(\hbar \xi a^\dagger a b^\dagger \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b^\dagger) \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b) \exp(-\hbar \nu b^\dagger b / kT) \right. \\ & \hbar \xi a^\dagger a b \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b^\dagger) \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b) \exp(-\hbar \nu b^\dagger b / kT) + \\ & \left. \hbar \nu b^\dagger b \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b^\dagger) \exp(-\hbar \xi a^\dagger a b) \exp(-\hbar \nu b^\dagger b / kT) \right) | \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_m \rangle. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Considerando as regras de atuação dos operadores a, a^\dagger, b e b^\dagger sobre os estados⁶ teremos que o primeiro e o segundo termo dessa expressão são nulos restando apenas o último termo que fornece a expressão:

$$E_{TB_2} = \frac{\sum_{nm} m \nu \hbar \exp \left[- \left(\xi \hbar n (\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) + m \hbar \nu \right) / kT \right]}{\sum_{nm} \exp \left[- \left(\xi \hbar (n \sqrt{m+1} + n \sqrt{m}) + m \hbar \nu \right) / kT \right]}, \quad (5.40)$$

Considerando agora apenas dois níveis de oscilação, $\{n, m\} = 0, 1$, a energia fica

$$E_{TB_2} = \frac{\hbar \nu (\exp(-\hbar \nu / kT) + \exp[-\hbar(\xi + \xi \sqrt{2} + \nu) / kT])}{1 + \exp(-\hbar \nu / kT) + \exp(-\hbar \xi / kT) + \exp[-(\xi \hbar (1 + \sqrt{2}) + \hbar \nu) / kT]}. \quad (5.41)$$

Assim, temos a energia do sistema em função da temperatura do sistema, da oscilação do ambiente e do termo de acoplamento.

⁶Comutação: $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Atuação: $a|\mathfrak{A}_n\rangle = \sqrt{n}|\mathfrak{A}_{n-1}\rangle$, e $a^\dagger|\mathfrak{A}_n\rangle = \sqrt{n+1}|\mathfrak{A}_{n+1}\rangle$. Deduzindo-se que $a^\dagger a|\mathfrak{A}_n\rangle = n|\mathfrak{A}_n\rangle$ e $|\mathfrak{A}_n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\mathfrak{A}_0\rangle$. Analogamente para b e b^\dagger .

- *Relação de Vínculo: ruído x taxa de decaimento x energia*

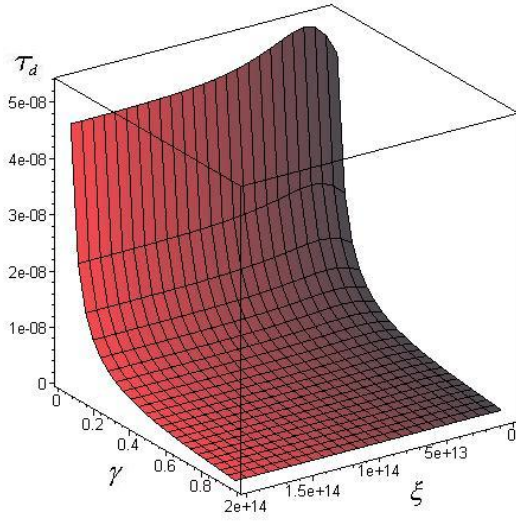
Substituindo (5.41) em (5.32) podemos estudar a taxa de descoerência do sistema τ_d em relação a probabilidade de ruído γ com a oscilação do ambiente ν , com a temperatura T e com o fator de acoplamento ξ .

$$\tau_d = -\frac{1 + \exp(-\hbar\nu/kT) + \exp(-\hbar\xi/kT) + \exp[-(\xi\hbar(1 + \sqrt{2}) + \hbar\nu)/kT]}{\ln(1 - \gamma)\nu(\exp(-\hbar\nu/kT) + \exp[-(\xi + \xi\sqrt{2} + \nu)\hbar/kT])}. \quad (5.42)$$

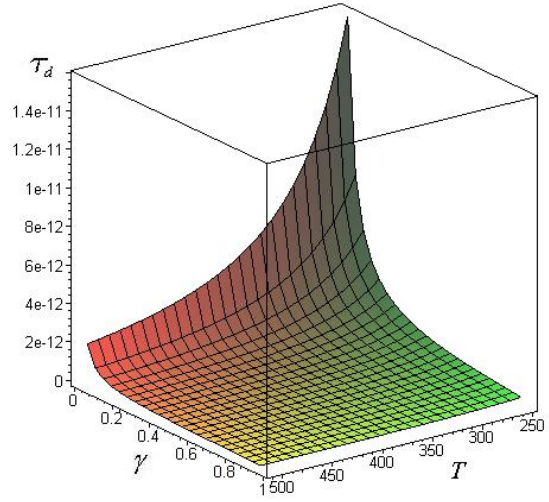
Com essa expressão podemos estimar o tempo com o que sistema se mantém em superposição antes de colapsar. Para $k = 1.3806568 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ e $\hbar = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J s}$, as figuras 5.10(a) a 5.10(d) mostram os valores mais sensíveis de τ_d em função de γ contra ξ , contra T e contra ν , respectivamente.

A análise da descoerência a partir do modelo de Fröhlich torna-se bastante delicada devido à grande liberdade no ajuste dos valores dos parâmetros. Neste estudo gráfico procuramos evidenciar as regiões mais sensíveis ao ruído ambiental, conciliando valores próximos às condições fisiológicas de temperatura e frequência de oscilação. Por outro lado, o grande número de parâmetros no modelo pode ser uma vantagem, já que podemos avaliar cada um em função do outro. Essa possibilidade torna a análise mais rica e o modelo mais abrangente.

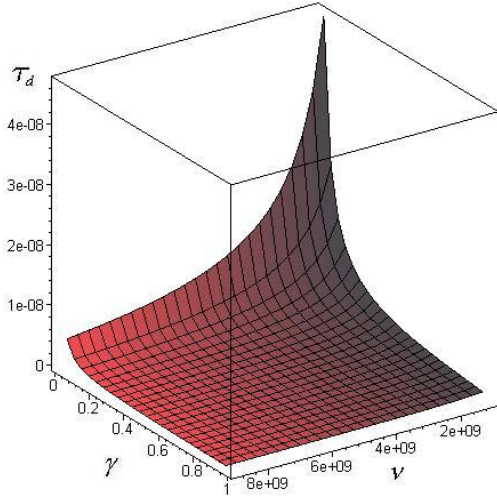
Para condições de temperatura no regime fisiológico ($310K$), o acoplamento não é muito relevante ao sistema; existe apenas uma leve ondulação na região próxima a $10^{13} s^{-1}$, para baixos valores de γ (figura 5.10(a)). Ao confrontarmos a probabilidade de ruído com a temperatura, somente para frequências elevadas ($10^{14} Hz$) o sistema apresentou maior sensibilidade a γ (figura 5.10(b)). Contudo, essa situação é melhor analisada ao avaliarmos diretamente a relação entre γ e a frequência. Interessantemente para frequências menores que $10^{13} Hz$, quanto maior o ruído e maior a frequência mais rápido o decaimento, com um máximo de $\tau_d \sim 10^{-8} s^{-1}$ (figura 5.10(c)). E para frequências maiores que $10^{13} Hz$, quanto maior o ruído e menor a frequência mais rápido o decaimento, com um máximo de $\tau_d \sim 10^{-7} s^{-1}$ (figura



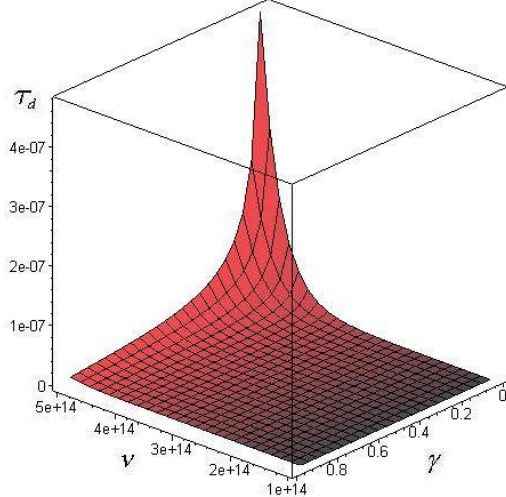
(a) Acoplamento $\xi \in (10^{12}, 10^{14})$ com $\nu = 10^9 \text{ Hz}$ e $T = 310 \text{ K}$.



(b) Temperatura $T \in (250, 500)$ com $\nu = 10^{14} \text{ Hz}$ e $\xi = 10^{13} \text{ s}^{-1}$.



(c) Frequência $\nu \in (10^9, 10^{10})$ com $\xi = 10^{13} \text{ s}^{-1}$ e $T = 310 \text{ K}$.



(d) Frequência $\nu \in (10^{14}, 5 \times 10^{14})$ com $\xi = 10^{13} \text{ s}^{-1}$ e $T = 310 \text{ K}$.

Figura 5.10: Tempo de descoerência no modelo de Fröhlich em função da probabilidade de ruído γ contra o termo de acoplamento ξ , figura 5.10(a); a temperatura T , figura 5.10(b) e a frequência de oscilação do ambiente ν , figuras 5.10(c) e 5.10(d).

5.10(d)). Essa análise mostra um limiar para a frequência de oscilação do ambiente mas corrobora os resultados anteriores, obtidos nos modelos de interação íon-íon e íon-dipólo, além de evidenciar a idéia de Fröhlich quanto aos valores da frequência de oscilação na sustentação da coerência quântica.

- **Estimativa: amortecimento de amplitude pelo modelo de Fröhlich**

Através do modelo de Fröhlich podemos também estimar o tempo de relaxação do sistema. Além da descoerência, a relaxação é um ruído de extrema importância que deve ser compreendido em cada sistema. Assim, considerando o acoplamento de primeira ordem apresentado em H_{SE} , caracterizamos o efeito de relaxação no formalismo de OQs.

Desse modo, sendo λ a probabilidade de um ruído quântico do tipo amortecimento de amplitude, supondo que durante um intervalo de tempo Δt a probabilidade λ ocorra numa taxa constante Γ_a , tal que $\lambda = \Gamma_a \Delta t \ll 1$, o sistema relaxa ($\lambda : |1\rangle \rightarrow |0\rangle$) exponencialmente na forma

$$\lambda = 1 - e^{-t/\tau_a} \quad (5.43)$$

caracterizando o efeito de relaxação no formalismo de OQs. Se novamente considerarmos o princípio de incerteza, $t \approx \hbar/E$, podemos relacionar a probabilidade de ruído λ com a energia do sistema, por

$$\tau_a = -\frac{\hbar}{\ln(1 - \lambda)E_{SE}}, \quad (5.44)$$

onde E_{SE} é a energia do sistema associada ao acoplamento de primeira ordem com o ambiente.

- *Cálculo da Energia*

Para calcularmos a energia do sistema (ambiente-principal) também estenderemos o sub-Hamiltoniano H_{SE} considerando a oscilação livre do ambiente. Assim, o sub-Hamiltoniano

total fica:

$$H'_{SE} = \sum_k \sum_i \hbar \eta (c_k a_i^\dagger + c_k^\dagger a_i) + \sum_k \hbar \mu_k c_k^\dagger c_k. \quad (5.45)$$

Adotando o mesmo procedimento usado para E_{TB_2} , concluímos que

$$E_{SE} = \frac{\sum_{nr} r \mu \hbar \exp \left[- \left(\eta \hbar (\sqrt{n} \sqrt{r+1} + \sqrt{n+1} \sqrt{r}) + r \hbar \mu \right) / kT \right]}{\sum_{nr} \exp \left[- \left(\eta \hbar (\sqrt{n} \sqrt{r+1} + \sqrt{n+1} \sqrt{r}) + r \hbar \mu \right) / kT \right]}. \quad (5.46)$$

Para dois níveis, $\{n, r\} = 0, 1$, temos

$$E_{SE} = \frac{\hbar \mu \left(\exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT) + \exp[-\hbar(2\sqrt{2}\eta + \mu)/kT] \right)}{1 + \exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT) + \exp(-\hbar\eta/kT) + \exp[-\hbar(2\sqrt{2}\eta + \mu)/kT]}. \quad (5.47)$$

Assim, conseguimos uma expressão da energia do sistema em função da temperatura do sistema, da oscilação do ambiente e do termo de acoplamento.

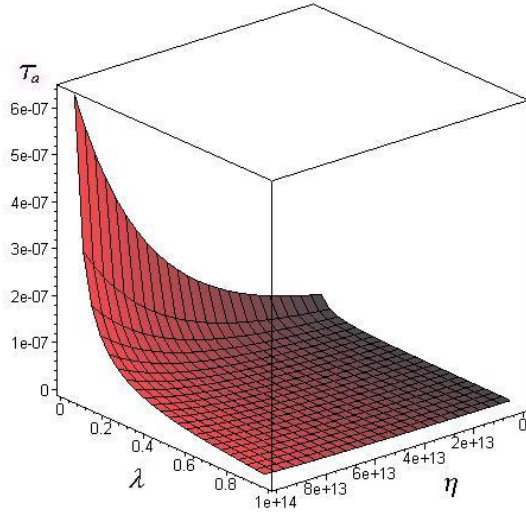
- *Relação de Vínculo: ruído x taxa de relaxação x energia*

Substituindo (5.47) em (5.44) podemos estudar a taxa de amortecimento do sistema τ_a em relação a probabilidade de ruído λ com a oscilação do ambiente μ , com a temperatura T e com o fator de acoplamento η .

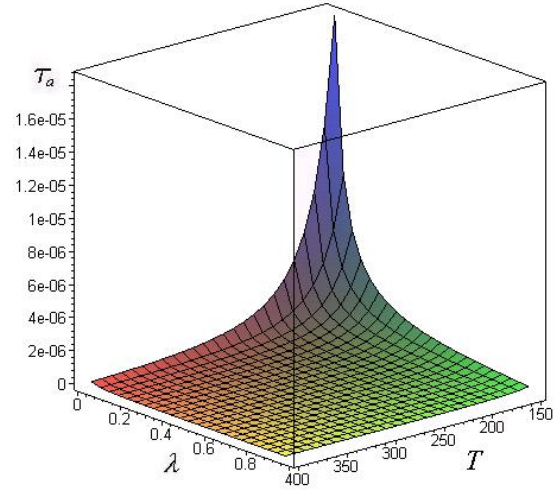
$$\tau_a = - \frac{1 + \exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT) + \exp(-\hbar\eta/kT) + \exp[-\hbar(2\sqrt{2}\eta + \mu)/kT]}{\ln(1 - \lambda) \hbar \mu \left(\exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT) + \exp[-\hbar(2\sqrt{2}\eta + \mu)/kT] \right)}. \quad (5.48)$$

Com essa expressão podemos estimar o tempo com o que sistema se mantém em superposição antes de colapsar. Para $k = 1.3806568 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ e $\hbar = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J s}$, as figuras 5.11(a) a 5.11(d) mostram os valores mais sensíveis de τ_a em função de λ contra η , contra T e contra μ , respectivamente.

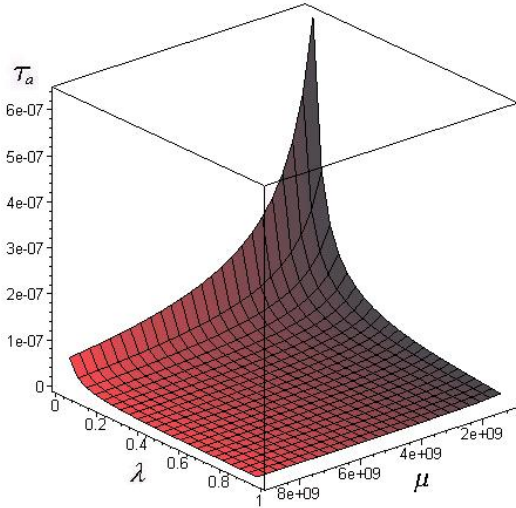
A análise de relaxação a partir do modelo de Fröhlich é também delicada devido a grande liberdade no ajuste dos valores dos parâmetros. Neste estudo gráfico, novamente procuramos evidenciar as regiões mais sensíveis ao ruído ambiental, conciliando valores próximos às condições fisiológicas de temperatura e frequência de oscilação.



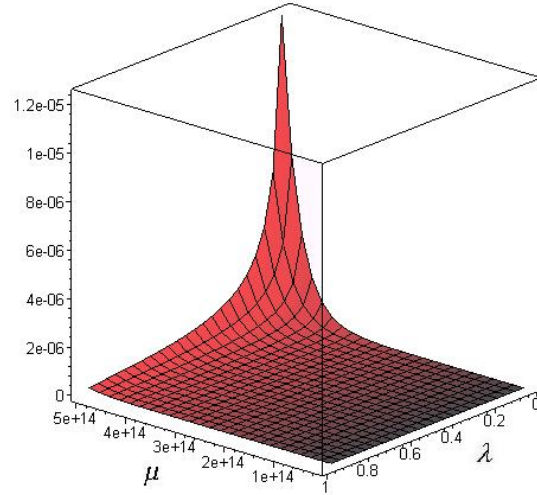
(a) Acoplamento $\eta \in (10^{12}, 10^{14})$ com $\mu = 10^9 \text{ Hz}$ e $T = 310 \text{ K}$.



(b) Temperatura $T \in (150, 500)$ com $\mu = 10^9 \text{ Hz}$ e $\eta = 10^{14} \text{ s}^{-1}$.



(c) Frequência $\mu \in (10^9, 10^{10})$ com $\eta = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ e $T = 310 \text{ K}$.



(d) Frequência $\mu \in (10^{14}, 5 \times 10^{14})$ com $\eta = 10^{13} \text{ s}^{-1}$ e $T = 310 \text{ K}$.

Figura 5.11: Tempo de relaxação no modelo de Fröhlich em função da probabilidade de ruído λ contra o termo de acoplamento η , figura 5.11(a); a temperatura T , figura 5.11(b) e a frequência de oscilação do ambiente μ , figuras 5.11(c) e 5.11(d).

Ao contrário da descoerência, para condições de temperatura no regime fisiológico ($310K$), o acoplamento mostra-se bastante influente na sustentação da excitação do sistema. Isso porque na descoerência o acoplamento é muito mais relevante, assim mesmo um acoplamento fraco é capaz de causar o efeito (mesmo para ruídos baixos). Enquanto que na relaxação a relação de acoplamento é mais sensível as condições de ruído. Na figura 5.11(a) exibimos a situação de maior sensibilidade $10^{14}s^{-1}$. Por outro lado, neste regime de acoplamento mais sensível, ao confrontarmos a probabilidade de ruído λ com a temperatura, mesmo para frequências da ordem de 10^9Hz o sistema apresentou grande sensibilidade ao ruído (figura 5.11(b)). No entanto, devido à forte relação de acoplamento-ruído, para um acoplamento mais brando o sistema mostra-se mais estável para ruídos menores ($\lambda \sim 0$). E novamente um limiar aparece na relação entre λ e a frequência μ . Para frequências menores que $10^{13}Hz$ quanto maior o ruído e maior a frequência, mais rápida a relaxação, com um máximo de $\tau_d \sim 10^{-7}s^{-1}$ (figura 5.11(c)). E para frequências maiores que $10^{13}Hz$, quanto maior o ruído e menor a frequência, mais rápida a relaxação, com um máximo de $\tau_d \sim 10^{-5}s^{-1}$ (figura 5.11(d)).

Essa análise é extramente importante pois pelo modelo de Fröhlich é a partir do acúmulo de energia que o sistema pode apresentar efeitos quânticos. E essa análise se mostra bastante consistente com as características físicas do modelo. O próximo passo será a comparação dessas regiões de coerência quântica com os pontos de equilíbrio de Nash nos modelos de JQs construídos a partir dos acoplamentos entre o sistema principal e o ambiente.

5.5.2 Descoerência e Relaxação x Equilíbrio de Jogo

Como um jogo é um processo de otimização de ações e recursos, de forma geral, com um modelo de jogo inserimos um novo critério de avaliação física sobre um sistema aberto. Se a perturbação de um sistema corresponde a ação de jogadores, e a informação associada a

esse sistema corresponde ao recurso “em jogo”, o que analisamos é justamente o equilíbrio físico desses dois aspectos. Como vimos, o equilíbrio de um jogo coincide com esse equilíbrio físico apresentado pelos pontos de EN e das EEEs. Portanto, a TJs pode ser uma ferramenta não só de modelagem, mas de avaliação de pontos de equilíbrio em sistemas abertos. Como os microtúbulos (e o cérebro como um todo) é um sistema aberto, esse novo critério pode corresponder a um processo de otimização sub-neuronal da informação no cérebro.

Para evidenciarmos a correspondência entre efeitos quânticos e a biofísica dos microtúbulos, modelamos os microtúbulos como uma grande rede de osciladores harmônicos acoplados satisfazendo o modelo de Fröhlich. Se assumirmos efeitos quânticos nos microtúbulos *a priori*, duas questões importantes são: (i) saber se existem pontos de estabilidade mesmo sob ruídos ambientais, e (ii) sob que condições físicas esses pontos surgem. Essas questões podem ser analisadas tomando-se duas configurações ambientais diferentes e procurando os pontos onde existem as menores perdas de informação do sistema. Dentro desse esquema, avaliaremos os tempos de coerência nos microtúbulos sob a ótica de TJs.

A partir dos modelos de JQs apresentados no capítulo anterior, estimaremos a relação entre temperatura, frequência de oscilação e ruído nos microtúbulos. Essa estimativa é fundamental para avaliarmos as condições de emergência e sustentação de possíveis efeitos quânticos. Para conseguirmos essa derivação biofísica, vamos utilizar os modelos de JQs usados na modelagem de um CQAF e de um CQAA (não generalizado), respectivamente. Ou seja, consideraremos dois tipos de acoplamentos com o ambiente, dados por H'_{SE} e H'_{TB_2} , descritos como um JQ, para os microtúbulos com o ambiente. Conseguiremos desta forma uma análise dos dois tipos de ruídos mais relevantes num sistema aberto quântico.

- **Condições Físicas de um JQM a partir de um CQAF nos Microtúbulos**

A descoerência é caracterizada pelo acoplamento de segunda ordem entre o sistema principal (microtúbulo) e o ambiente, gerando um CQAF. Considerando a relação $\gamma = \sin^2(\xi\hbar/E)$ avaliamos as condições de um JQM para um CQAF a partir da temperatura e da frequência de oscilação do sistema. Esses serão os parâmetros físicos de controle de jogo em nosso modelo. Entretanto, como as estratégias de jogo são dadas pelos superoperadores, precisamos avaliar a relação dos superoperadores do Hamiltoniano estendido H'_{TB_2} (5.33) com os superoperadores de H_{TB_2} .

- *Cálculo das Estratégias para o Hamiltoniano Estendido*

Da equação de Schrödinger [103,104], a transformação unitária referente a H'_{TB_2} (5.34), fica

$$U'_{TB_2} = \exp \left(-it\xi(a^\dagger ab^\dagger + a^\dagger ab) - it\nu b^\dagger b \right), \quad (5.49)$$

o que produz a relação $U_{TB_2} = U_{TB_2}(I \otimes U_E)$, onde

$$U_{TB_2} = \exp \left(-it\xi(a^\dagger ab^\dagger + a^\dagger ab) \right), \quad U_E = \exp \left(-it\nu b^\dagger b \right), \quad (5.50)$$

onde U_E é a transformação unitária referente somente ao espaço do ambiente (banho térmico). A extensão adotada satisfaz exatamente a condição de não-unicidade dos superoperadores. Isso significa que os superoperadores associados ao sub-Hamiltoniano estendido H'_{TB_2} são totalmente equivalentes aos superoperadores associados ao sub-Hamiltoniano H_{TB_2} (sem o termo de oscilação livre). Além disso, como a base $\{|\mathfrak{B}_k\rangle\}$ forma o conjunto de autovetores de $b^\dagger b$ temos que

$$U_E = \sum_m \exp(-it\nu m) |\mathfrak{B}_m\rangle \langle \mathfrak{B}_m|. \quad (5.51)$$

Portanto, para um CQAF, do teorema (4.11), os novos superoperadores são dados por

$$\mathbf{F}_m = \exp(-it\nu m)\mathbf{S}_{m0}^{TB_2}. \quad (5.52)$$

Implicando que, para um ρ qualquer, $\mathbf{F}_i\rho\mathbf{F}_i^\dagger \equiv \mathbf{S}_i\rho\mathbf{S}_i^\dagger, \forall i$. Portanto, a extensão H'_{TB_2} não altera a forma dos superoperadores (3.16). Consequentemente não altera a transformação dos superoperadores em operadores unitários (4.12).

- *Condições de Jogo*

Dessa forma, as estratégias de um JQM que modela a interação física dos microtúbulos com duas configurações ambientais (jogadores), A e B , serão exatamente os operadores (4.12). O conjunto final de estratégias, dos jogadores A e B será dado por $\mathcal{S}_{A,B} = \{s_0^{A,B} = I, s_1^{A,B} = Z\}$. Novamente, satisfazendo as regras de aplicação, o jogador A (B) aplica a estratégia s_0 com uma probabilidade p (q) e aplica a estratégia s_2 com uma probabilidade $(1-p)$ ($(1-q)$). Lembrando que, para o JQM de um CQAF, vale:

$$\begin{aligned} p &= \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\xi\hbar}{E_A}\right)}\right)/2 & q &= \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\xi\hbar}{E_B}\right)}\right)/2 \\ &= \cos^2\left(\frac{\xi\hbar}{2E_A}\right); & &= \cos^2\left(\frac{\xi\hbar}{2E_B}\right), \end{aligned}$$

onde as energias E_A e E_B , associadas aos ambientes (jogadores) A e B , se distinguem pelas temperaturas T_A e T_B em (5.41), ou seja:

$$E_{A,B} = \frac{\hbar\nu \left(\exp(-\hbar\nu/kT_{A,B}) + \exp[-\hbar(\xi + \xi\sqrt{2} + \nu)/kT_{A,B}] \right)}{1 + \exp(-\hbar\nu/kT_{A,B}) + \exp(-\hbar\xi/kT_{A,B}) + \exp[-(\xi\hbar(1 + \sqrt{2}) + \hbar\nu)/kT_{A,B}]}, \quad (5.53)$$

onde omitimos o sub-índice TB_2 já que as análises de cada tipo de acoplamento serão feitas isoladamente. Assim, iremos avaliar no jogo para que valores de ν , ξ existem pontos de equilíbrio para o sistema variando-se as temperaturas T_A e T_B .

Tomando o estado maximamente emaranhado $J(\pi/2)H^{\otimes 2}|00\rangle$, o *payoff* dos jogadores é calculado a partir de (4.14). Para um estado final de jogo na forma (4.13), a solução analítica é dada por (4.17).

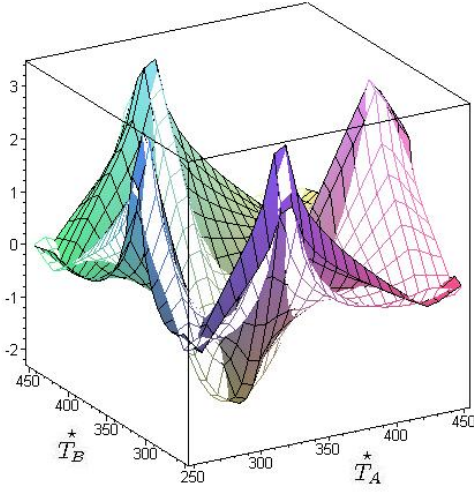
- *Resultados Numéricos*

Dado o estado $J(\pi/2)H^{\otimes 2}|00\rangle$, variando-se os parâmetros ν , e ξ , calculamos os melhores pares de temperatura (T_A^*, T_B^*) , contra (T_A, T_B) , que geram os pontos em EN. As figuras 5.12(a) até 5.12(d) mostram esses pontos onde o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (2.11a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (2.11b).

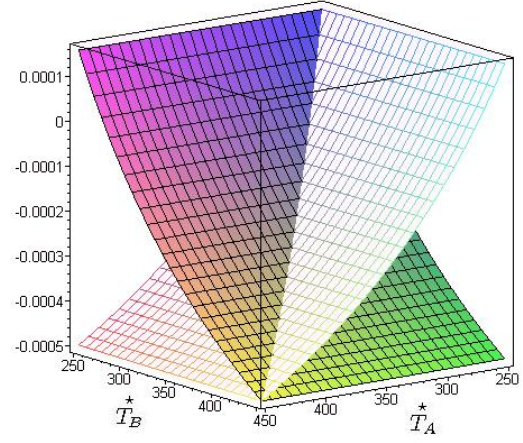
Contudo, a análise pode ser inversa. Isto é, podemos fixar os valores das temperaturas $(T_A^*, T_B^*) = (310K, 310K)$ e nos perguntar para que valores de (T_A, T_B) , ν e ξ o sistema será estável. As figuras 5.13(a) a 5.13(d) mostram essa avaliação.

Nessa análise gráfica procuramos enfocar a sensibilidade dos pontos de equilíbrio frente à intensidade de acoplamento e quanto a frequência de oscilação ambiental. Observamos que, apesar de, no cálculo direto do efeito de descoerência a dependência com o acoplamento ser fraca, na análise de equilíbrio e estabilidade do sistema como um todo, o acoplamento é fundamental. Lembramos que num jogo avaliamos a relação entre duas configurações ambientais diferentes. Por isso, a dependência com o acoplamento é mais sensível.

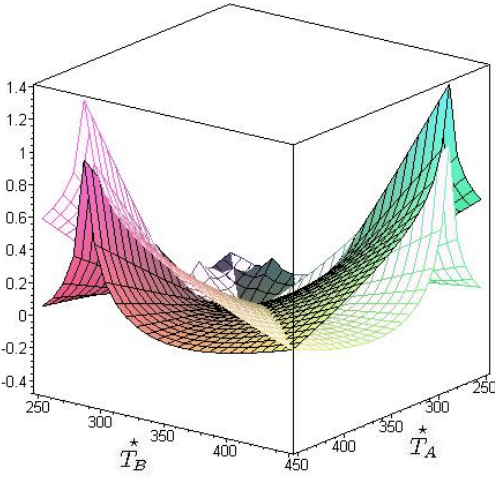
Nos jogos apresentados nas figuras 5.12(a) a 5.12(d) avaliamos as possíveis temperaturas em EN contra uma temperatura baixa (comparada aos parâmetros fisiológicos $\sim 310K$) e de valor fixo. Assim, calculamos os pontos de equilíbrio assumindo um jogo contra estratégias com temperaturas de $280K$. Esta imposição poderia dificultar consideravelmente o aparecimento de pontos de estabilidade, já que a entropia tende a aumentar com o aumento da



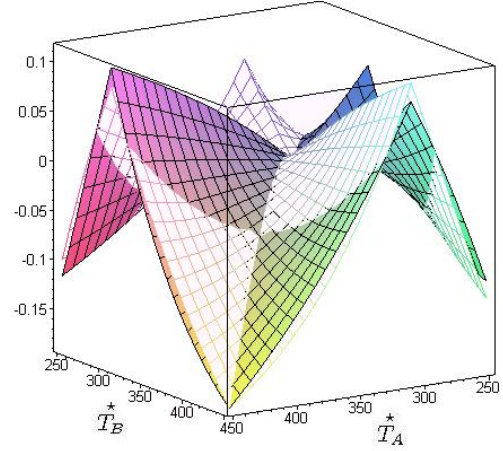
(a) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx \{(310, 250), (250, 310), (310, 450), (450, 310)\}$ para $\nu = 10^9$ e $\xi = 6 \times 10^{11} s^{-1}$.



(b) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx (250, 250)$ para $\nu = 10^9$ e $\xi = 10^{10} s^{-1}$.

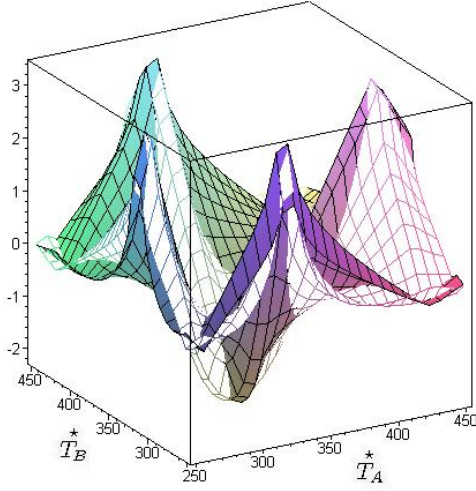


(c) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx (450, 450)$ para $\nu = 10^{12}$ e $\xi = 10^{13} s^{-1}$.

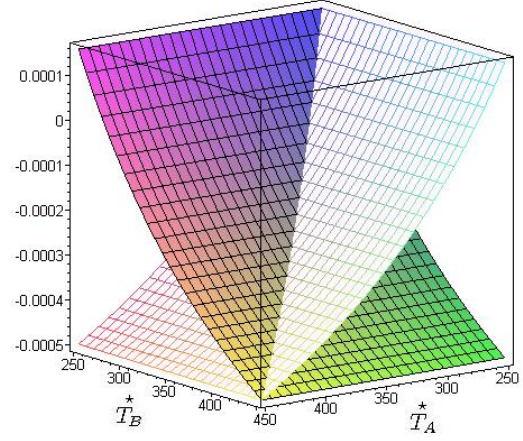


(d) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx \{(310, 450), (450, 310)\}$ para $\nu = 10^{12}$ e $\xi = 8 \times 10^{12} s^{-1}$.

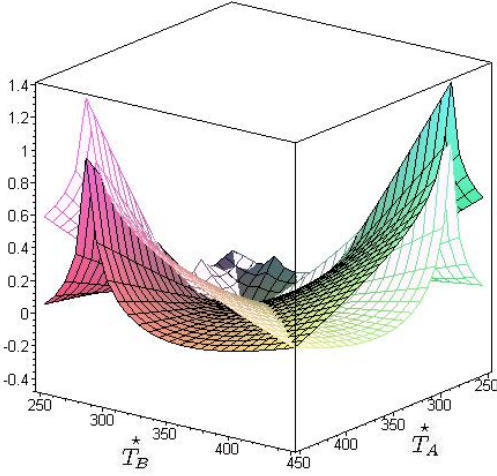
Figura 5.12: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (T_A^*, T_B^*) para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente ν e do acoplamento ξ contra $(T_A, T_B) = (280, 280)$. Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.



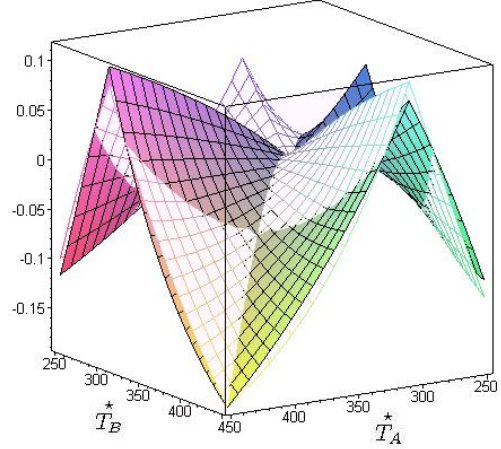
(a) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx \{(300, 450), (450, 300)\}$ para $\nu = 10^9$ e $\xi = 7 \times 10^{11} s^{-1}$.



(b) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (450, 450)$ para $\nu = 10^9$ e $\xi = 10^{10} s^{-1}$.



(c) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (250, 250)$ para $\nu = 10^{12}$ e $\xi = 9 \times 10^{11} s^{-1}$.



(d) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (450, 450)$ para $\nu = 10^{12}$ e $\xi = 5 \times 10^{10} s^{-1}$.

Figura 5.13: Fixando-se $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ e variando-se (T_A, T_B) , as interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente ν e do acoplamento ξ . Neste modelo de jogo quântico, dois CQTFs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.

temperatura. No entanto, podemos ver que para todas as frequências de oscilação ambiental, houveram pontos de estabilidade. Apesar de não exibirmos, os jogos contra estratégias com temperaturas mais altas que a fisiológica (por exemplo $350K$), com raras exceções, se mostraram ainda mais estáveis.

Já nos jogos apresentados nas figuras 5.13(a) a 5.13(d) avaliamos para que temperaturas o regime fisiológico é estável. Assim, observamos que dependendo da frequência de oscilação e da intensidade de acoplamento, pontos de estabilidade podem surgir com temperaturas fisiológicas. Esse resultado é bastante interessante já que o único fator de ajuste foi a intensidade do acoplamento considerando um regime de oscilação do ambiente relativamente próximo dos encontrados em sistemas biofísicos. Além disso, todos os jogos apresentaram um limiar de acoplamento. Esse limiar é mais nítido nas figuras 5.13(a) e 5.13(c) quando interessadamente o jogo mostra-se mais estável quando comparado com temperaturas mais baixas. Esse limiar aparece, dependendo da frequência de oscilação, num regime entre $10^{11}s^{-1}$ e $10^{13}s^{-1}$ e faz com que o sistema se torne muito mais sensível à variação da intensidade de acoplamento do que necessariamente à variação da frequência de oscilação do ambiente (como mostrado nas figuras 5.13(b) e 5.13(d)).

A principal conclusão é que regiões de equilíbrio e de estabilidade da informação podem ocorrer justamente entre as regiões de oscilação prevista fisicamente pelo modelo de Fröhlich, isto é, 10^9Hz e $10^{12}Hz$. Este resultado é importante pois liga as soluções do modelo de jogo com os resultados puramente físicos apresentados na seção anterior. Além disso, com o modelo de jogo, podemos relacionar a preservação da coerência com os máximos de conservação da informação. Assim, comparando os valores dos tempos de coerência nos modelos de interação íon-íon, íon-dipólo e de osciladores, vemos que os regimes de maior coerência quântica podem ocorrer com valores de ruídos que geram pontos de EN e EEEs.

- **Condições Físicas de um JQD a partir de um CQAA nos Microtúbulos**

Como o modelo de Fröhlich nos permite avaliar o processo de relaxação do sistema, vamos analisá-lo também sob a ótica da TJs. A relaxação é caracterizada pelo acoplamento de primeira ordem entre o sistema principal (por exemplo, o microtúbulo) e o ambiente, gerando um Canal Quântico de Amortecimento de Amplitude (CQAA). Considerando novamente a relação $\lambda = \sin^2(\xi\hbar/E)$ avaliamos as condições de um JQD para um CQAA (não generalizado) a partir da temperatura e da frequência de oscilação do sistema. Esses serão os parâmetros físicos de controle de jogo em nosso modelo. Entretanto, como as estratégias de jogo são dadas pelos superoperadores, precisamos novamente avaliar a relação dos superoperadores do Hamiltoniano estendido H'_{SE} (3.15) com os superoperadores de H_{SE} .

- *Cálculo das Estratégias para o Hamiltoniano Estendido*

Da equação de Schrödinger, a transformação unitária referente a H'_{SE} , fica

$$U'_{SE} = \exp(-it\eta(ca^\dagger + c^\dagger a) - it\mu c^\dagger c). \quad (5.54)$$

Assim, como no CQAF, vemos que $U'_{SE} = U_{SE}(I \otimes U_E)$, onde

$$U_{SE} = \exp(-it\eta(ca^\dagger + c^\dagger a)), \quad U_E = \exp(-it\mu c^\dagger c). \quad (5.55)$$

Dessa forma, essa extensão também satisfaz a condição de não-unicidade dos superoperadores. Isso significa que os superoperadores associados ao sub-Hamiltoniano estendido H'_{SE} são totalmente equivalentes aos superoperadores associados ao sub-Hamiltoniano H_{SE} . Implicando que, do teorema (4.11), se $\{\mathbf{F}_i\}$ formam o conjunto dos novos superoperadores associados à transformação unitária U'_{SE} , para um ρ qualquer implica que $\mathbf{F}_i \rho \mathbf{F}_i^\dagger \equiv \mathbf{S}_i \rho \mathbf{S}_i^\dagger, \forall i$. Portanto, a extensão H'_{SE} não altera a forma dos superoperadores (3.15).

- *Condições de Jogo*

As estratégias de um JQ que modela a interação física dos microtúbulos com duas configurações ambientais (jogadores), A e B , serão dadas exatamente pelos superoperadores (3.15). O conjunto final de estratégias, dos jogadores A e B será dado por $\mathcal{S}_{A,B} = \{s_0^{A,B} = \mathbf{S}_{00}^{SE}, s_1^{A,B} = \mathbf{S}_{01}^{SE}\}$. Como aqui estamos considerando um jogo quântico determinístico (JQD), os parâmetros físicos serão introduzidos diretamente aos parâmetros de ruídos nas matrizes referentes a cada superoperador, tal que

$$\lambda_A = \sin^2(\eta\hbar/E_A), \quad \lambda_B = \sin^2(\eta\hbar/E_B). \quad (5.56)$$

onde as energias E_A e E_B , associadas às configurações ambientais (jogadores) A e B , se distinguem pelas temperaturas T_A e T_B em (5.47), ou seja:

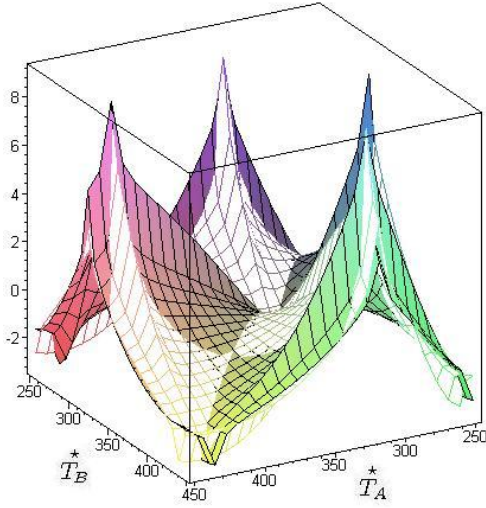
$$E_{A,B} = \frac{\hbar\mu \left(\exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT_{A,B}) + \exp[-\hbar(2\sqrt{2}\eta + \mu)/kT_{A,B}] \right)}{1 + \exp(-\hbar(\eta + \mu)/kT_{A,B}) + \exp(-\hbar\eta/kT_{A,B}) + \exp[-(2\sqrt{2}\eta\hbar + \hbar\mu)/kT_{A,B}]} \quad (5.57)$$

onde omitimos o sub-índice SE . Assim, iremos avaliar no jogo para que valores de μ , η existem pontos de equilíbrio para o sistema, variando-se as temperaturas T_A e T_B .

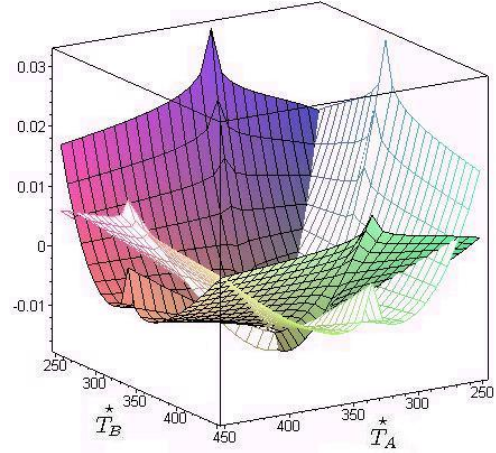
Para um estado final de jogo na forma (4.1), o *payoff* dos jogadores é calculado a partir de (3.20). Tomando o estado maximamente emaranhado $J(\pi/2)|00\rangle$ a solução analítica é dada por (4.4).

- *Resultados Numéricos*

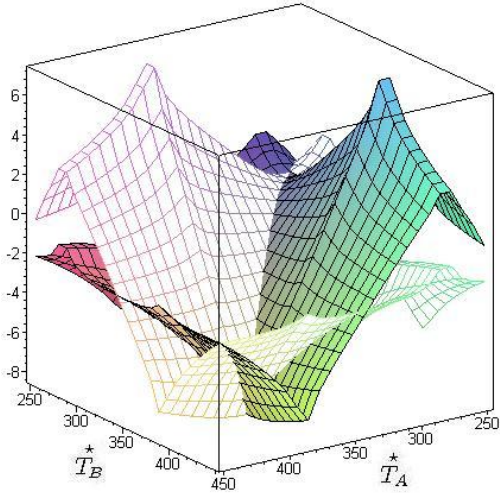
Dado o estado $J(\pi/2)|00\rangle$, variando-se os parâmetros μ , e η , calculamos os melhores pares de temperatura (T_A^*, T_B^*) , contra (T_A, T_B) , que geram os pontos em EN. As figuras 5.14(a) até 5.14(d) mostram esses pontos onde o eixo vertical das superfícies descoloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador A , dados por (2.11a), e o eixo vertical das superfícies coloridas corresponde aos pontos de equilíbrio do jogador B , dados por (2.11b).



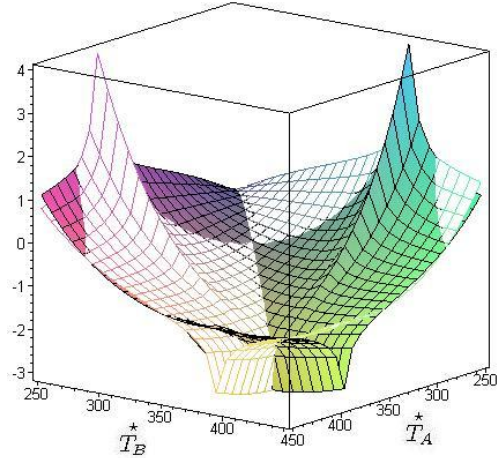
(a) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx \{(310, 250), (250, 310), (310, 450), (450, 310)\}$ para $\mu = 10^9$ e $\eta = 4 \times 10^{11} s^{-1}$.



(b) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx (250, 250)$ para $\mu = 10^9$ e $\eta = 8 \times 10^{10} s^{-1}$.



(c) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx (300, 300)$ para $\mu = 10^{12}$ e $\eta = 10^{13} s^{-1}$.



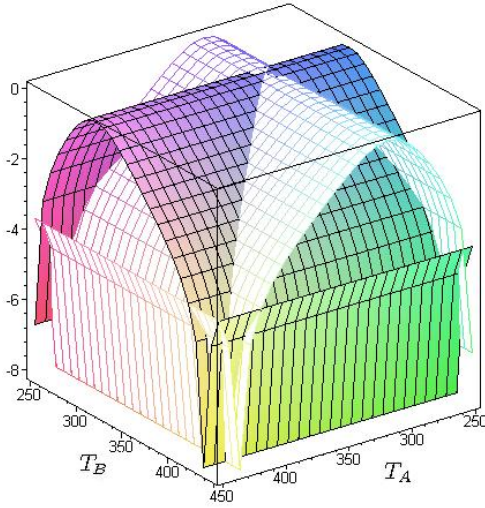
(d) Pontos em EN para $(T_A, T_B) = (280, 280)$ onde $(T_A^*, T_B^*)_{\text{MAX}} \approx \{(250, 250), (250, 400), (400, 250)\}$ para $\mu = 10^{12}$ e $\eta = 7 \times 10^{12} s^{-1}$.

Figura 5.14: As interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN (T_A^*, T_B^*) para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente μ e do acoplamento η contra $(T_A, T_B) = (280, 280)$. Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.

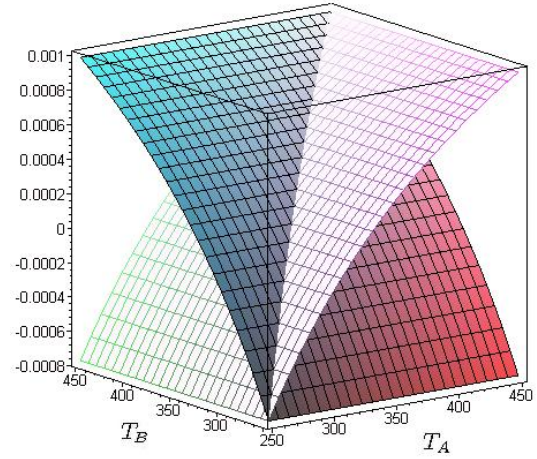
Analisando inversamente, fixamos os valores das temperaturas $(T_A^*, T_B^*) = (310K, 310K)$ e novamente nos perguntamos para que valores de (T_A, T_B) , μ e η o sistema será estável. As figuras 5.15(a) até 5.15(d) mostram essa avaliação.

Assim como na descoerência, analisamos inicialmente os possíveis valores da temperatura em EN. Nessa avaliação fixamos novamente a temperatura de comparação em $280K$. Novamente, os pontos de equilíbrio surgiram mesmo para temperaturas elevadas ($T_{A,B}^* \gtrsim 310K$). Visto a possibilidade de equilíbrio e estabilidade para temperaturas altas, a análise inversa apresentadas nas figuras 5.15(a) a 5.15(d) explicitam bem a relevância da frequência de oscilação do ambiente e da intensidade de acoplamento. Em ambas as análises a intensidade de acoplamento se mostrou extremamente importante no processo de otimização da informação. Além disso, novamente surge um limiar de acoplamento onde separa-se os regimes de oscilação. Ou seja, para um acoplamento acima do limiar ($10^{11} - 10^{12}s^{-1}$) frequências e temperaturas mais altas tendem a ser privilegiadas.

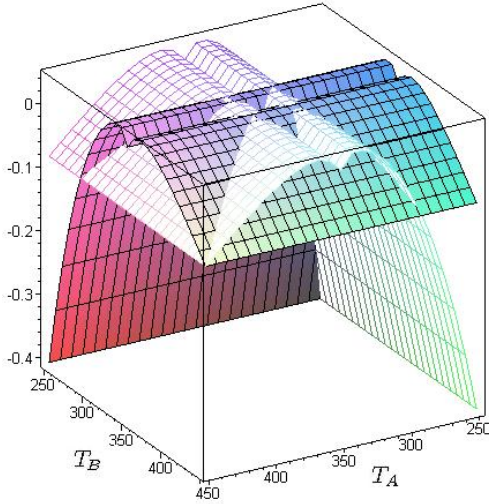
A partir das análises gráficas mostradas principalmente nas figuras 5.15(b) e 5.15(d) fica claro que mesmo a uma temperatura de $310K$ o sistema pode exibir não apenas pontos de EN mas também pontos de EEES. Esse resultado expressa a possibilidade de haver uma excelente estabilidade da informação mesmo sob temperaturas e frequências características de sistemas fisiológicos. Assim, confrontando com os resultados puramente físicos dos tempos de relaxação vemos que novamente os pontos de equilíbrio de jogo podem corresponder aos melhores tempos de sustentação da energia no sistema. Essa relação mostra que o sistema pode ficar estável (com mínima perda de informação) por períodos de tempo relevantes.



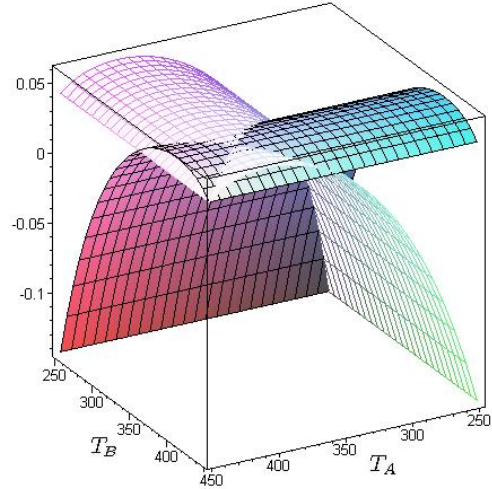
(a) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (310, 310)$ para $\mu = 10^9$ e $\eta = 5 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$.



(b) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (450, 450)$ para $\mu = 10^9$ e $\eta = 8 \times 10^9 \text{s}^{-1}$.



(c) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx \{(300, 300), (350, 350), (300, 350), (350, 300)\}$ para $\mu = 10^{12}$ e $\eta = 4 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$.



(d) Pontos em EN para $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ onde $(T_A, T_B)_{\text{MAX}} \approx (380, 380)$ para $\mu = 10^{12}$ e $\eta = 3 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$.

Figura 5.15: Fixando-se $(T_A^*, T_B^*) = (310, 310)$ e variando-se (T_A, T_B) , as interseções positivas das superfícies mostram os pontos em EN para diferentes valores da frequência de vibração do ambiente μ e do acoplamento η . Neste modelo de jogo quântico, dois CQAAs são considerados como dois jogadores, A e B , com máximo grau de emaranhamento.

5.6 Conjecturas para Construção de um Modelo Sub-Neuronal Quântico

Apesar das imensas críticas ao modelo de Penrose e Hameroff algumas propostas a favor da idéia de se considerar efeitos quânticos no cérebro incitam à algumas questões que podem ajudar na construção de conjecturas mais sólidas:

1. Assumindo a hipótese de Fröhlich nos microtúbulos, é possível reescrever o modelo de Penrose-Hameroff sob a teoria de descoerência?
2. Penrose e Hameroff reivindicam o modelo de Fröhlich no processo de sustentação da coerência no cérebro mas não formalizam essa reivindicação. Como relacionar de forma concisa o modelo de Fröhlich com os microtúbulos?
3. Os tempos de sustentação da coerência quântica são compatíveis (descoerência x Orch OR)? Se negativo, quais as implicações?
4. Penrose e Hameroff reivindicam uma computação quântica nos microtúbulos num processo tipo autômatos celulares. Contudo não há explicitação do critério quântico de processamento de informação. Como construir esse critério respeitando as propriedades e condições biofísicas do cérebro?
5. A teoria de descoerência exige um tratamento estatístico sobre a medida dos estados quânticos. Como o cérebro prepararia os estados iniciais no cérebro para essa estatística?
6. Que consequências essas mudanças trariam aos fundamentos do modelo de Penrose-Hameroff? Se a não-computabilidade mental está expressa na descrição de colapso dos

estados quânticos no cérebro pela gravidade (Orch OR), de que forma haveria essa não-computabilidade através da descoerência? É a mente não-computável realmente?

A seguir, considerando os modelos de JQs associados à teoria de descoerência, listamos uma série de proposições e hipóteses na tentativa de apontar possíveis direções de respostas (ou pesquisas) das questões apresentadas acima:

1. Análise Quântica da Dinâmica Biofísica dos Microtúbulos:

Se assumirmos um tratamento quântico do cérebro, mais especificamente dos microtúbulos, com o modelo de Fröhlich e aplicando o formalismo de OQs, podemos montar as bases para responder as questões (1) e (2). E a partir do cálculo das taxas apresentadas na seção 5.5.1 montamos as bases para responder a questão (3). Descrevendo a dinâmica dos microtúbulos com o modelo Fröhlich, podemos assumir também nossas construções de JQs em sistemas abertos. Assim, ganhamos uma formalização de um critério de otimização da informação no cérebro em nível sub-neuronal.

2. Otimização da Informação nos Microtúbulos

A partir de nosso critério de recompensa, relacionamos naturalmente os ruídos inseridos pelo ambiente com pontos de equilíbrio onde a informação é minimamente perdida. Ao contextualizarmos fisicamente esses jogos (como feito na seção anterior) mostramos que mesmo para temperaturas altas (como as do corpo humano) o sistema pode atingir esses pontos de equilíbrio. Isso garantiria, em princípio, um estoque e processamento de informação nos microtúbulos. Além disso, se tomarmos a interpretação evolucionista dos modelos de jogos quânticos, podemos pensar num processo natural de otimização no cérebro. Esse processo

seria uma otimização da informação via seleção natural. Isso poderia ser a chave para respondermos as questões (4), (5) e (6).

Uma boa base para respondermos a questão (4) começaria assumindo que vários jogos são jogados ao longo do tempo. Assim, o que teríamos é uma constante otimização da informação representada nos estados quânticos. Existiria então um tipo de processamento de informação sobre os estados quânticos emergentes a partir da interação com o ambiente.

Na verdade, essa idéia não é totalmente nova. A própria hipótese de automatos celulares de Hameroff e Penrose pode ser vista como um tipo de processo evolutivo. Outros trabalhos já fizeram referência a competição neuronal [117], algoritmos genéticos [118,119], programação evolucionista [120], computação quântica evolucionista [121,122], e mesmo jogos já foram mencionados como critério de processamento de informação no cérebro [69-71]. A grande novidade está na especificação do sistema físico, na construção dos modelos de jogos e no cálculo das condições físicas para haver esse processamento.

3. Preparação de Estados Quânticos por Seleção Natural:

A questão (5), apesar de mais delicada, poderia ser respondida a partir dos conceitos de EEE com a interpretação evolucionista. Nessa interpretação as estratégias estariam associadas aos operadores unitários $U(\theta, \phi)$. Sendo o cérebro um sistema natural, inicialmente surgiriam estratégias $U(\theta_k, \phi_k)$ aleatórias. Após um período de otimização, algumas estratégias serão EEE (já que como mostrado, existem condições físicas para isso). Deste modo, se um estado $U(\theta, \phi)|x\rangle$ é dado por uma EEE, então qualquer estado $U(\theta', \phi')|x\rangle$ mutante, será punido pela seleção natural. Ou seja, $U(\theta', \phi')|x\rangle$ será menos estável aos ruídos que $U(\theta, \phi)|x\rangle$ mostrando uma preferência para certos estados. Além disso, apesar de todas as mudanças sofridas pelo corpo (fisiológicas, físicas, ...) ao longo do tempo, admitimos por

hipótese que as características essenciais no cérebro, que irão contribuir para o surgimento de uma certa estratégia $U(\theta, \phi)$, não mude efetivamente num período curto. Esta preferência e pequena variação de condições iniciais, poderia ser interpretada como uma preparação estatística adequada.

4. Descoerência e Computabilidade Mental

Quanto a questão (6), existem duas mudanças fundamentais na troca do modelo de Penrose pela descoerência. A primeira delas é justamente o tratamento estatístico imposto pela teoria de descoerência. Essa mudança é fundamental pois a consciência (ou qualquer emergência mental) não pode mais ser entendida em termos de colapsos a tempo discreto. Isto porque o tempo de coerência calculado a partir da interação com o ambiente é muito menor do que o tempo de coerência calculado pela Orch OR. Deste modo, ao invés de um único estado quântico representando o estado cérebro-mental teríamos um *ensemble* de estados (mistura estatística), onde cada um interfere com o outro ao longo do tempo. Qualquer função mental emergiria não devido ao colapso da função de onda em si, mas sim devido ao acúmulo dos estados quânticos durante o tempo.

A segunda mudança é quanto a computabilidade mental. Esse é um aspecto extremamente delicado pois existem muitas críticas entorno do rigor do “argumento” de Penrose em prol dessa não-computabilidade mental. Além disso, existe no argumento uma falta de separação no que diz respeito as funções mentais. Ou seja, pode-se alternativamente interpretar que Penrose no fundo alega que é a *criatividade humana* a função mental não-computável. Reivindicando que toda e qualquer função mental é não dissociável, ele conclui que a consciência humana é não-computável [47,49,123-126]. Contudo, em seu modelo (e em qualquer outro modelo físico) não há a especificação exata de como se manifesta a consciência humana. Existe apenas um postulado de que esta manifestação é dada a partir do colapso dos estados

quânticos, e que este processo é não-computável. Portanto, não existe qualquer garantia (física, biológica, lógica...) de que esse argumento reducionista seja verdadeiro. Logo, nos limitamos a descrever um possível processamento quântico de informação num nível sub-neuronal. Reivindicamos apenas que esse processamento tem alguma correspondência com funções mentais executadas no cérebro⁷.

Além disso, podemos dizer que o cérebro possui uma falta de isolamento em dois níveis. O primeiro é o nível físico que descreve o contato do cérebro com o ambiente a sua volta. Neste nível, o cérebro troca calor com o ambiente a todo momento, num ciclo constante de perda e suprimento de energia. O segundo é o nível de informação. Através dos sentidos há uma constante entrada de informações no cérebro e através da ação motora há uma constante saída de informação para o exterior⁸. Neste nível, há uma intrincada troca de informação entre o ambiente e o cérebro. De forma geral, o problema fundamental em qualquer *teoria da mente* é descrever como esses dois níveis se relacionam.

5. Modelo Especulativo Evolucionista da Dinâmica Biofísica Cerebral

Extrapolando as conjecturas matemáticas, podemos especular que as impressões cerebrais seriam produzidas pela abertura de segundo nível entre o cérebro e ambiente externo. Essas impressões mudam constantemente, interferindo na pressão seletiva física realizada pelo

⁷Um argumento alternativo ao da orch OR para a não-computabilidade mental pode estar na associação do critério de parada de Church-Turing (que define se uma função é ou não computável) com um procedimento evolucionista. Num processo evolucionista não existe um critério de parada pois não existe um objetivo *a priori*. Assim, talvez no processo de otimização da informação no cérebro também não tenha. Em nossos modelos de jogos a otimização foi feita considerando-se somente a interação entre o ambiente físico e os estados quânticos. Com a interpretação evolucionista de jogo, se considerarmos a emergência “aleatória” dos estados quânticos $\{U(\theta, \phi)|x\rangle\}$, podemos resgatar essa característica de constantes testes. Inicialmente a emergência dos estados quânticos é aleatória. A interação com o ambiente biofísico gera uma seleção natural de alguns estados. Alguns estados serão mais aptos e tenderão a emergir novamente reduzindo a aleatoriedade. Além disso, a emergência inicial desses estados deve também estar associada às informações impressas na estrutura cerebral.

⁸Observamos que o conceito de informação nesse contexto é bem mais abrangente que o conceito dado pela Teoria da Informação. Isso porque a informação associada ao sistema cérebro-mente carrega inerentemente um aspecto subjetivo, como o significado dos objetos.

ambiente nos estados quânticos, variando constantemente os pontos de equilíbrio do sistema geral. Deste modo, a abertura do cérebro ao ambiente externo (nível dois) cria um vínculo recursivo onde a informação quântica selecionada irá depender da resposta do ambiente ao indivíduo, que por sua vez depende da ação do indivíduo [127]. Essa abertura gera uma pressão seletiva sobre as impressões do cérebro sobre o ambiente externo que irá gerar uma pressão sobre os estados quânticos no cérebro.

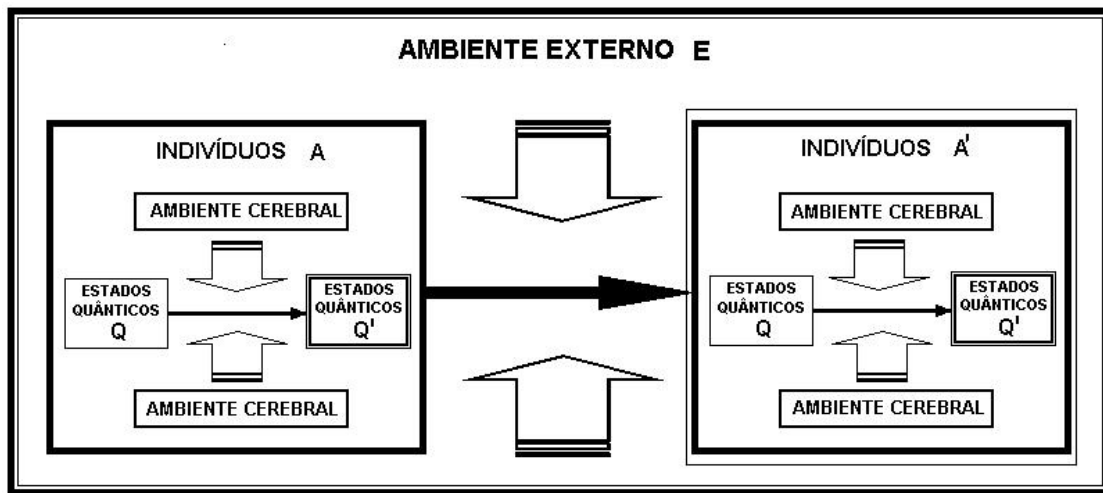


Figura 5.16: Esquema hipotético de um modelo evolucionista representando as duas pressões seletivas presentes no sistema cérebro-mente-ambiente. A primeira pressão corresponderia a uma pressão sobre as estratégias quânticas e a segunda sobre as estratégias do indivíduo.

Um modelo que considere essa influência do ambiente externo merece ainda um maior detalhamento. A TJs pode ser um método para descrever esse processo. No entanto seria necessário uma matriz *payoff* que considerasse tanto as influências internas (físicas) do cérebro sobre a informação contida nos estados quânticos, como as influências externas do ambiente sobre o sistema cerebral.

5.6.1 Síntese da Hipótese de um Critério de Processamento Evolucionista Sub-Neuronal da Informação

1. Os estados quânticos no cérebro são gerados e sustentados por um processo do tipo Fröhlich.
2. Os efeitos quânticos nos microtúbulos são dados por uma rede de fônons devido a alta frequência de oscilação do sistema.
3. Durante a coerência dos estados quânticos existe um processamento de informação (otimização) por um critério Darwinista:

★ As amplitudes de probabilidade dos estados quânticos são descritas por operadores unitários $U(\theta, \phi)$, interpretados na TJQs como estratégias.

★ Essas estratégias sofrem uma pressão seletiva a partir da interação com o ambiente. Essa interação é descrita por superoperadores que representam uma medida natural do ambiente sobre o sistema.

★ As “melhores” estratégias serão aquelas que garantirem uma menor perda de informação do sistema principal.

4. A abertura do cérebro com as informações do ambiente externo propicia uma segunda pressão seletiva sobre o tipo de informação que está sendo privilegiada no cérebro.

★ O ambiente externo muda as impressões do cérebro que interferem na seleção física dos estados quânticos.

★ Esse vínculo com o mundo externo cria uma recursão entre o critério de otimização da informação quântica no cérebro e a resposta do indivíduo.

★ Essa entrada e saída constante de informação no cérebro poderia ser a base para a uma descrição alternativa da não-computabilidade da mente humana.

5. Qualquer função mental de alto nível (como insights, noção subjetiva do tempo,...) é gerada a partir de um acúmulo de estados quânticos ao longo do tempo.
6. O colapso da função de onda é dado por um processo de interação com o ambiente via descoerência.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

O principal resultado desse trabalho foi a descrição do modelo biofísico de Fröhlich como um jogo quântico. Com essa descrição foi possível a formalização, interpretação e análise de vários contextos físicos e biofísicos, dentre os quais listamos:

- Aplicando o formalismo de Operações Quânticas no Hamiltoniano de Fröhlich, explicitamos os superoperadores (operadores de Kraus) que representam uma medida do ambiente sobre o sistema principal. Esses superoperadores foram derivados isolando-se cada tipo de acoplamento entre o sistema principal e o ambiente. No modelo de Fröhlich existem dois tipos básicos de acoplamento: o de *primeira ordem* que gera um canal quântico de amortecimento de amplitude (CQAA) e o de *segunda ordem* que gera um canal quântico de amortecimento de fase (CQAF). Cada canal caracteriza um tipo de ruído comum em sistemas quânticos. O primeiro (CQAA) caracteriza a perda de energia do sistema principal devido a interação com o ambiente. O segundo (CQAF) caracteriza a perda de coerência quântica do sistema principal devido a interação com o ambiente. Cada canal é descrito por um conjunto de superoperadores que podem ser tomados como estratégias num jogo quântico. Esse jogo é interpretado como um jogo entre duas configurações diferentes do ambiente, que descreve uma dinâmica de

otimização física natural de um sistema quântico aberto.

- Considerando-se que o sistema de Fröhlich é um sistema aberto, uma questão básica é saber sobre a quantidade de informação existente nesse sistema após interação com o ambiente. Essa questão pode ser reformulada perguntando-se sob que condições físicas o sistema apresenta menor perda de informação. Mostramos que a solução para esse problema pode ser obtida a partir de um critério de recompensa no modelo de jogo onde as estratégias dos jogadores são superoperadores. Esse critério foi construído calculando-se a quantidade de informação do sistema principal após a atuação de cada superoperador. Aplicando esse critério de recompensa no formalismo de Teoria de Jogos conseguimos calcular regiões de equilíbrio onde a perda de informação é mínima, em cada tipo de acoplamento. Esse critério de recompensa mostrou-se extremamente eficiente e natural. Com ele é possível descrever um sistema aberto sobre o protocolo padrão de um jogo quântico sem perda de nenhuma propriedade física relevante. Ao contrário, esse critério se mostrou, não somente uma importante ferramenta de otimização como, uma medida alternativa da quantidade de informação num sistema quântico aberto. A partir dessa descrição de jogo, ganhamos não apenas em interpretação mas também em alternativa metodológica para a avaliação de pontos ótimos de estoque de informação em sistemas abertos.
- O cálculo dos pontos de equilíbrio do sistema de Fröhlich foi realizado considerando-se o protocolo de jogo quântico de J. Eisert *et al.* Mostramos que, apesar da grande compatibilidade do protocolo, se quisermos evidenciar os efeitos causados pelos ruídos provindos dos acoplamentos, é necessário fazer algumas modificações. Essas modificações no entanto, não alteraram a descrição padrão de um jogo quântico sob nenhum aspecto. Dessa forma, mostramos que em cada acoplamento (que geram o CQAA e

o CQAF) o sistema sempre se mostra mais estável (com mais regiões de equilíbrio: mínima perda de informação) quando está maximamente emaranhado. Esse resultado evidencia a grande diferença de um sistema aberto para um sistema isolado. No jogo padrão Dilema do Prisioneiro (DP) é mostrado que na região de transição o sistema ($\chi \approx 2\pi/11$) podem ocorrer *payoffs* mais altos. Contudo, o resultado mais interessante nessa análise foi a verificação da existência de pontos de estabilidade num sistema sob intenso ruído ambiental.

- Na descrição do sistema de Fröhlich como um jogo quântico, dividimos os modelos em duas classes: Jogos Quânticos Determinísticos (JQDs) e Jogos Quânticos Mistos (JQMs). Os JQDs foram definidos por aqueles em que os jogadores aplicam suas estratégias simultânea e deterministicamente. E os JQMs foram definidos por aqueles em que os jogadores aplicam probabilisticamente suas estratégias. Desse modo, com a classe de JQM propusemos um novo esquema de jogo quântico devido as restrições físicas impostas pelas condições de um sistema aberto. Para satisfazer o protocolo de jogo e a dinâmica física exata, introduzimos o teorema da não unicidade no modelo de jogo do CQAF e no modelo de jogo do CQAA tomamos a generalização do canal extendendo-o para um CQAA generalizado (CQAAG). Essas extensões trouxeram modificações na forma estrutural dos jogos já que o critério de recompensa foi tomado a partir da probabilidade de aplicação das estratégias. Deste modo, com os JQDs e com os JQMs construímos dois modelos de jogos quânticos em sistemas abertos com critérios de recompensa diferenciados. Esse é um resultado interessante pois mostra a maleabilidade de análise da Teoria de Jogos e, ao mesmo tempo, sua eficiência.
- Tomando o modelo de Fröhlich como descrição da dinâmica biofísica dos microtúbulos (componentes básicos do endoesqueleto das células), e reestruturando-o no formato de

JQ, explicitamos os parâmetros físicos na relação sistema-ambiente. Assim, calculamos os valores de temperatura e frequência que garantem a estabilidade física e menor perda de informação nos microtúbulos. Confrontando esses valores com uma análise das taxas de amortecimento de amplitude e de descoerência do sistema principal, mostramos que os pontos de equilíbrio podem corresponder aos melhores regimes de sustentação da energia e coerência quântica. Esse resultado é fundamental para a consolidação e elaboração de modelos que descrevem um processamento de informação sub-neuronal através dos microtúbulos.

- Esses modelos visam o entendimento da emergência de funções cerebrais mais fundamentais como a criatividade, unidade mental, noção subjetiva de tempo e a própria consciência humana. O modelo quântico de Penrose-Hameroff é um dos de maior destaque nessa linha. Considerando a teoria de descoerência e a aplicação da Teoria de Jogos em sistemas abertos, nós propusemos uma reformulação dos principais pontos críticos do modelo de Penrose-Hameroff. Essa reformulação, apesar de ainda bastante teórica e genérica, contém informações mais concisas e elos mais fortes com a física vigente, tornando as hipóteses mais palpáveis. Nossa principal idéia é considerar um esquema evolucionista dos estados quânticos nos microtúbulos. Essa dinâmica pode ser descrita pela formulação de jogos quânticos reinterpretados no contexto Darwinista. Deste modo, haveriam duas pressões seletivas: uma pressão inteiramente física, descrita a partir do acoplamento do sistema principal quântico com o ambiente e outra pressão mais abstrata, descrita pela interação da informação impressa na estrutura neurobiológica do indivíduo, (que geram suas ações) com o ambiente externo. A primeira pode ser modelada a partir de nossas proposições de jogos quânticos para um sistema aberto. A segunda merece um maior cuidado pois esta interação introduziria um elo recursivo entre a estrutura do cérebro e o ambiente externo. Além disso, dificilmente poderia-se

negligenciar a relação entre a primeira seleção e a segunda já que a segunda muda as condições físicas do ambiente seletivo (no primeiro processo) e vice-versa. Assim, a ação do indivíduo é influenciada por certos estados quânticos, que são selecionados por uma pressão seletiva física, essa pressão seletiva física depende da conformação estrutural do cérebro que, por sua vez, é extremamente complexa e muda de acordo com a pressão seletiva externa. Os estados quânticos no cérebro seriam sustentados por um processo de Fröhlich e o colapso ocorreria via descoerência.

Dada a extrema eficiência e simplicidade com que a Teoria de Jogos foi aplicada num problema de difícil formulação física, houve uma abertura para novas investigações. Dentre essas listamos algumas perspectivas de trabalhos futuros:

- Aplicar a metodologia de OQs para o Hamiltoniano completo de Fröhlich. Ou seja, considerando todos os acoplamentos simultaneamente.
- Construir um modelo de jogo adequado para essa extensão considerando o mesmo critério de recompensa.
- Aplicar o critério de recompensa adotado para outros sistemas abertos ou processos de medida. Com interesse especial em sistemas aplicados à Computação Quântica.
- Analisar a validade de interpretação da *aptidão*, em nosso critério de recompensa, como uma medida alternativa de entropia num sistema interfaceado com o ambiente.
- Analisar e formular com maior precisão a interpretação de jogos quânticos como um sistema evolucionista.
- Avaliar a aplicabilidade dessa reinterpretação em sistemas biofísicos.

- Formular os detalhes matemáticos da teoria quântica de processamento de informação nos microtúbulos a partir de um critério evolutivo.
- Avaliar a possibilidade de vínculo entre um modelo que descreva a relação entre uma pressão seletiva externa e uma pressão seletiva física (interna).
- Avaliar a possibilidade de aplicação da TJs como modelo descritivo dessa formulação.

A partir desse trabalho mostramos a Teoria de Jogos como uma metodologia extremamente robusta e eficiente, aplicável a contextos puramente físicos ou biofísicos. Essa aplicação pode ser útil não somente como ferramenta, pois explicitou facilmente as regiões mais estáveis, mas também como modelo explicativo de certas dinâmicas existentes em sistemas quânticos abertos.

Apêndice A

Cálculo do Coeficiente $g(m, k)$

Simplificando a notação, o cálculo do coeficiente $g(m, j)$ é iniciado pela relação

$$(b + b^\dagger)^m |0\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} g(m, j) |j\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde $|0\rangle$ representa o *ground state* do sistema e N representa o tamanho do espaço. Essa relação de recorrência aparece devido a não-comutatividade entre b e b^\dagger , isto é $[b, b^\dagger] = 1$.

Como cada sistema possui dimensão finita, valem os limites de atuação dos operadores:

$$b|j\rangle = \begin{cases} |j-1\rangle & , \text{ se } j > 0 \\ 0 & , \text{ se } j \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad b^\dagger|j\rangle = \begin{cases} |j+1\rangle & , \text{ se } j < N-1 \\ 0 & , \text{ se } j \geq N-1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando indutivamente (A.1), teremos:

$$\begin{aligned} (b + b^\dagger)^{m+1} |0\rangle &= (b + b^\dagger) \left(\sum_{j=0}^{N-1} g(m, j) |j\rangle \right) \\ &= (b + b^\dagger) \left(g(m, 0) |0\rangle + \sum_{j=1}^{N-2} g(m, j) |j\rangle + g(m, N-1) |N-1\rangle \right) \\ &= g(m, 0) |1\rangle + \sum_{j=1}^{N-2} (g(m, j) |j+1\rangle + g(m, j) |j-1\rangle) + g(m, N-1) |N-2\rangle \\ &= g(m, 0) |1\rangle + \sum_{j=2}^{N-1} g(m, j-1) |j\rangle + \sum_{j=0}^{N-3} g(m, j+1) |j\rangle + g(m, N-1) |N-2\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

De (A.1), tem-se:

$$(b + b^\dagger)^{m+1} |0\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} g(m+1, j) |j\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} g(m+1, j) |j\rangle &= g(m, 0) |0\rangle + (g(m, 0) + g(m, 2)) |1\rangle + \\ &+ \sum_{j=2}^{N-3} (g(m, j-1) + g(m, j+1)) |j\rangle + \\ &(g(m, N-3) + g(m, N-1)) |N-2\rangle + g(m, N-2) |N-1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Gerando, portanto, as relações de recorrência:

$$\begin{cases} g(m+1, 0) = g(m, 1) \\ g(m+1, j) = g(m, j-1) + g(m, j+1), \text{ para } 1 \leq j \leq N-2 \\ g(m+1, N-1) = g(m, N-2) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

onde, dos limites (A.2), tiramos as condições iniciais:

$$g(0, 0) = 1, \quad g(1, 0) = 0. \quad (\text{A.7})$$

A expressão principal do sistema (A.6) é uma equação diferencial em duas variáveis (ou índices) cuja solução pode ser verificada em [128]. Porém, para o sistema particular de dois níveis, ($N = 2$ com $j = 0, 1$), podemos utilizar diretamente (A.6) e (A.7) para calcularmos os coeficientes. Assim, com $N = 2$, (A.1) temos

$$(b + b^\dagger)^m |0\rangle = g(m, 0) |0\rangle + g(m, 1) |1\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, teremos o sistema

$$\begin{cases} g(m+1, 0) = g(m, 1) \\ g(m+1, 1) = g(m, 0) \end{cases}. \quad (\text{A.9})$$

Fazendo $m = 0, 1, \dots, \infty$ e aplicando (A.7) obtem-se que

$$g(m, 0) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } m \text{ par} \\ 0 & , \text{ se } m \text{ ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(m, 1) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m \text{ par} \\ 1 & , \text{ se } m \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Logo, a aplicação de $(b + b^\dagger)^m$ faz o sistema oscilar entre os níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Apêndice B

O Problema Cérebro-Mente

Nas últimas décadas a Neurociência ganhou um grande impulso com a descrição de várias funções cerebrais importantes. Muitas dessas funções eram antes totalmente desconhecidas e muitas ditas impossíveis de descrição científica¹. Nessa crescente corrente de estudos das relações cérebro-mente uma inevitável consequência é nos perguntar sobre as bases, biológicas e físicas, da consciência humana (e de outras funções de mais alto nível como a sensação subjetiva do tempo, unidade mental, criatividade e livre arbítrio). A consciência é sem dúvida um dos maiores mistérios para a ciência e até então vem sendo deixada apenas para a filosofia. Entretanto, entre os avanços e as lacunas deixadas pela neurociência, muitos pesquisadores apostam que já somos capazes de ao menos apontar as bases científicas desse problema. Dentro dessa “nova” linha investigativa da ciência podemos dividir basicamente 3 grandes grupos de pesquisadores:

1. Os que acreditam que todas as funções mentais são dadas por relações (neuro) biológicas onde é apenas uma questão de tempo descrevê-las.

- 1.1. Dentro desse grupo existem os que acreditam que as relações (neuro) biológicas são as únicas responsáveis pela existência da mente humana. Assim, somente o cérebro

¹A associação de certas áreas do córtex com o comportamento humano, ou distúrbios psíquicos com fenômenos (neuro) bioquímicos como depressão, ansiedade, alucinação... são alguns exemplos.

humano, da forma como é concebido, é capaz de “processar” todas as funções mentais.

1.2. E existem os que acreditam que as relações (neuro) biológicas são apenas um meio que a natureza encontrou para “processar” a mente humana. Portanto, seria possível a reprodução dessas propriedades mentais em meios artificiais, como computadores.

2. Os que acreditam que somente uma descrição (neuro) biológica não é suficiente para a explicação de todas funções mentais (principalmente as de alto nível). Portanto, a introdução de relações puramente físicas teriam um papel fundamental nessa descrição cérebro-mente. Esse grupo não nega as relações (neuro) biológicas mas as considera insuficientes para uma descrição completa.

2.1. Novamente, existem os que acreditam que esse é o único caminho para a descrição das funções cérebro-mentais. Sendo totalmente impossível a reprodução artificial e manifestação de todos os aspectos da mente humana².

2.2. E aqueles que acreditam que, compreendendo todas as relações físicas e biológicas do sistema cérebro-mente, será possível a reprodução artificial de todas as funções mentais humana.

3. Por fim, existem aqueles que acreditam que as propriedades de alto nível da mente humana jamais serão descritas de maneira científica.

3.1. Dentro desse grupo existem aqueles que acreditam que é necessária uma reformulação da própria metodologia científica para a descrição completa do problema, principalmente para a consciência humana³.

3.2. E existem aqueles que acreditam que nem a ciência, nem nenhuma outra metodologia criada pela mente humana, será capaz de descrever todos os aspectos da mente

²Alguns acreditam ser possível a reprodução artificial das propriedades mentais mas essa reprodução (simulação das relações físico-biológicas do cérebro) jamais conseguiriam manifestar as funções mentais de alto nível.

³Alega-se basicamente que, sendo a ciência uma metodologia que descreve relações objetivas (*objetos*) e a consciência, por definição, uma manifestação de relações subjetivas (*sujeito*), a ciência não teria meios de atacar o problema.

humana.

Algumas considerações mais fundamentais alicerçam as perspectivas apresentadas acima. A primeira delas é o *realismo*. Essa é uma vertente filosófica que considera a existência de todo e qualquer processo na natureza como um processo objetivo. Isto é, a natureza, ou a realidade, existe independente da existência de um observador. Essa é uma vertente básica da pesquisa científica mas que se obscurece quando se lida com fenômenos e relações subjetivas (como as da mente humana), e relações subjetivas-objetivas (como um processo de percepção da natureza e a consciência). A segunda é o *reducionismo*. Nessa vertente existe um apelo de que os processos mentais possam ser reduzidos a processos físicos e/ou biológicos e processos biológicos reduzidos a processos físicos. Claramente nenhuma dessas vertentes é necessariamente verdadeira. Mas o esclarecimento das mesmas impõem restrições necessárias em qualquer processo de investigação e teorização que considere aspectos fundamentais da natureza.

B.1 Modelo Quântico Cerebral de Penrose e Hameroff

Uma grande linha do grupo 2 é, sem dúvida alguma, dada pela proposta de Roger Penrose. Penrose diz que a consciência humana jamais seria simulável num computador [47]. A idéia básica de Penrose se apóia no fato de que todo computador, por definição, leva um conjunto de informações iniciais num conjunto de informações finais segundo o critério proposto por Alan Turing, chamado Máquina de Turing [82-84,129-130]. Usando o teorema da incompleteza de Kurt Gödel [47-48,123-126], ele “demonstra” (ou argumenta) que se assumirmos que a mente humana possa ser representada por algum algoritmo então ou o teorema de Gödel está errado ou a mente humana não é *Turing computável* [129].

Como não se espera que o teorema de Gödel esteja errado, se seu “argumento” estiver

correto, assume-se que a mente humana não é *Turing computável*. Para descrever essa não computabilidade mental, Penrose reivindica que existem fenômenos quânticos no cérebro. Esses fenômenos quânticos seriam fundamentais para a produção de certas funções mentais, como a própria consciência humana.

Para Penrose, esse aspecto não-computável é uma propriedade inerente de sistemas quânticos mas que ainda pende por uma teoria que explique essa propriedade. Em linhas gerais, para Penrose o colapso da função de onda ocorre naturalmente na natureza, não por causa da descoerência (nem por qualquer outra interpretação) mas sim por ação gravitacional sobre esses estados. Para ele, mesmo um sistema quântico isolado irá colapsar devido a atuação gravitacional. A medida que cresce a superposição dos estados quânticos, num certo sistema físico, cresce também a distribuição de massa-energia associada a esses estados. O aumento da superposição entre os estados acentua a diferença de massa-energia desses estados que coexistem. Por outro lado, de acordo com a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein, a métrica do espaço-tempo é determinada pela distribuição de massa-energia dos corpos. Desse modo, com a superposição, a métrica associada a cada estado quântico, de cada objeto, começa a se tornar diferente, isto é, duas curvaturas para um mesmo corpo. Mas, das regras da TRG, o espaço-tempo exige a localidade dos objetos portanto, a gravidade impõe um limiar de tempo de superposição forçando ao colapso dos estados. Esse efeito gravitacional é chamado por Penrose de Redução Objetiva (*Objective Reduction* - “OR”) [116]. Esse colapso quântico gravitacional seria um fenômeno não Turing computável.

Penrose então, juntamente com Stuart Hameroff, situa esse efeito quântico numa região sub-neuronal do cérebro humano conhecida como microtúbulos, mais especificamente nas tubulinas [48].

B.1.1 Redução Objetiva Orquestrada como Computação Quântica

O modelo de Penrose-Hameroff propõe que existe uma mudança de carga eletônica entre a tubulina α e a tubulina β . Essa mudança de carga eletrônica se daria pelo salto de um elétron de uma tubulina para outra. Penrose e Hameroff reivindicam haver a possibilidade de sustentação do estado superposto do elétron, entre uma tubulina e outra, por um tempo suficiente para colocar a tubulina numa configuração superposta “ $\alpha + \beta$ ”. Essa superposição seria a chave de uma “computação quântica” num nível sub-neuronal. Deste modo, cada heterodimer (par α - β) representaria um *qubit* onde, por exemplo, o estado de conformação α representaria o qubit $|0\rangle$ e o estado de conformação β representaria o qubit $|1\rangle$, e a superposição eletrônica “ $\alpha + \beta$ ” representaria o estado quântico $a|0\rangle + b|1\rangle$ (figura B.1). O colapso dos estados superpostos ocorreria pela redução objetiva (OR).

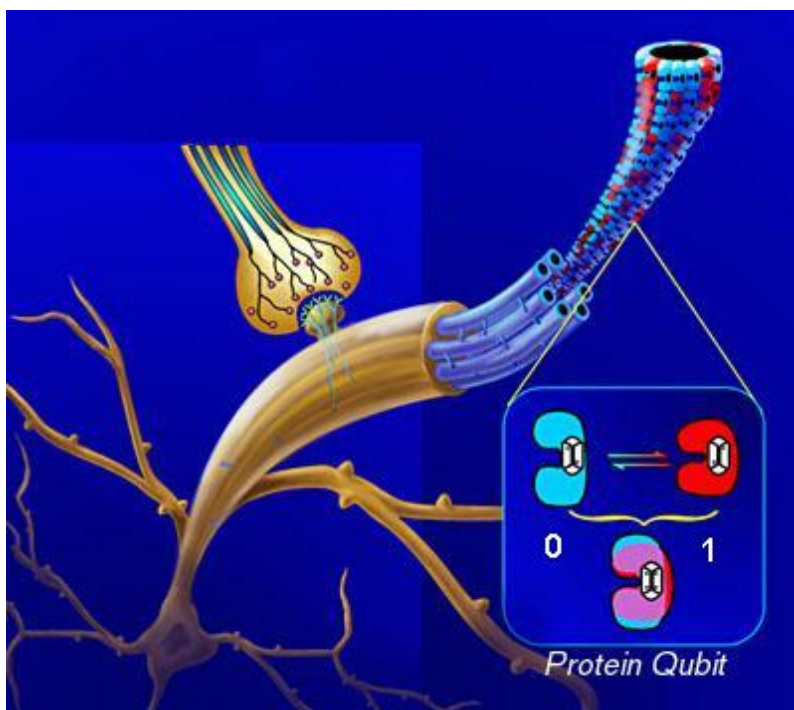


Figura B.1: Representação da característica quântica e binária das tubulinas nas paredes dos microtúbulos neuronais (www.consciousness.arizona.edu/~hameroff).

Desta forma, usando a estrutura dos microtúbulos, R. Penrose e S. Hameroff postulam

que funções mentais de alto nível, como a própria consciência humana, emergiriam a partir desse processo quântico-computacional no cérebro. Enquanto a superposição coerente dos estados se expandem, existe uma computação quântica através das tubulinas, que funcionam como automatismos celulares nas paredes dos microtúbulos. Neste estágio existe ainda uma propagação de informação por guias de onda dentro dos microtúbulos dos neurônios. Nesta parte do ciclo em que a superposição dos estados é mantida, existe um estado de pré-consciência no indivíduo. Haveria então um ciclo de crescimento, sustentação e colapso. No instante do colapso, segundo R. Penrose e S. Hameroff, haveria a emergência da consciência pela OR, figura B.2.



Figura B.2: Esquemática gráfica do período de sustentação da coerência quântica nos microtúbulos até o colapso da função de onda devido ao efeito gravitacional (www.consciousness.arizona.edu/~hameroff)

Todos esses ciclos ocorreriam de maneira coordenada, ou orquestrada, ao longo das paredes dos microtúbulos. Devido a este orquestramento, principalmente no colapso dos estados quânticos, Penrose e Hameroff chamaram esse efeito de “redução objetiva orquestrada” (*objective orchestrated reduction: orch OR*).

Referências Bibliográficas

- [1] Neumann, J. von, Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 2nd ed. (1947).
- [2] Nash, J., *Proc. of the National Academy of Sciences*, 36, 48 (1950).
- [3] Nash, J., “Non-cooperative games”, *Ann. Math.* 54, 287-295 (1951).
- [4] Smith, J. Maynard, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press (1982).
- [5] Smith, J. Maynard, *On Evolution*, Edingburgh University Press (1972).
- [6] Hofbauer, J. and Sigmund, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, (1998).
- [7] Travis, R., *Social Evolution*. The Benjamim/Cummings Publishing Company, Inc. (1985).
- [8] Plenio, M. B. and Vedral, V., “Entanglement in Quantum Information Theory”, *Contemp. Phys.* 39, 431 (1998).
- [9] Werner, R. F., “Optimal cloning of pure states”, *Phys. Rev. A* 58, 1827 (1998).
- [10] Ekert, A. K., “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).
- [11] Dawkins, R., *The selfish gene*. Oxford ; New York : Oxford University Press (1989).
- [12] Dawkins, R., *The blind watchmaker*. NY: Norton (1986).
- [13] Eisert, J., Wilkens, M., Lewenstein, M., “Quantum Games”, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3077 (1999).

- [14] Marinatto, L. and Weber, T., “A quantum approach to static games of complete information”, *Phys. Lett. A*, 272, 291 (2000).
- [15] Meyer, D. A., “Quantum strategies”. *Physical Review Letters*, 82, 1052 (1999).
- [16] Eisert, J. and Wilkens, M., “Quantum Games”. *Mod. Opt.* 47, 2543 (2000).
- [17] Iqbal, A., Toor, A. H., “Darwinism in quantum systems?”, *Phys. Lett. A*, 294, 261 (2002).
- [18] Benjamim, S. C. and Hayden, P. M., “Multiplayer quantum games”, *Phys. Rev. A* 64, 030301 (2001).
- [19] Benjamin, S. C. and Hayden, P. M., “Comment on Quantum Games and Quantum Strategies”, *Phys. Rev. Lett.* 87, 069801 (2001).
- [20] Benjamin, S. C., “Comment on A quantum approach to static games of complete information”, *Physics Letters A* 277, 180 (2000).
- [21] Fröhlich, H., *Coherent excitations in active Biological systems*, in *Modern Bioelectrochemistry*, edited by F. Gutman and H. Keyzer, Springer Verlag, N York, (1986).
- [22] Fröhlich, H., “Coherent Electric Vibrations in Biological Systems and Cancer Problem”. *IEEE Transation*, MTT 26, 613-617, (1978).
- [23] Fröhlich, H., “The biological Effects of Microwaves and Related Questions”. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, 53, 85-152, (1980).
- [24] Wu, T-M. and Austin, S., “Biological Bose Condensation and the time Threshold for Biological Effects”. *Physics Letters*, 73, 266-268, (1979).
- [25] Pokorný, J., “Fröhlich Coherent states: Implications for interactions in Biological System and Information Transfer”. *Neural Network World*, 831-847, (1995).
- [26] Pokorný, J. and Wu, T-M., *Biophysical Aspects of Coherence and Biological Order*. Springer (1998).
- [27] Fröhlich, H., “The Extraordinary Dielectric Properties of Biological Materials and the

- Action of Enzymes”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, 11, 4211-42 (1975).
- [28] Fröhlich, H., “Long-range coherence and energy storage in biological systems”, *Int. J. Quantum Chem.* 2, 641, (1968).
- [29] Fröhlich, H., “Bose condensation of strongly excited longitudinal electric modes”, *Physics Letters A* 26, 402 (1968).
- [30] Nielsen, M. A. and Chuang, I., *Quantum Computation and Information.*, 2nd Cambridge University Press (2000).
- [31] Preskill, J., *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation.* <http://www.theory.caltech.edu/preskill/ph229>, (1998).
- [32] Breuer, H-P. and Petruccione, F., “Concepts and Methods in the Theory of Open Quantum Systems”. arXiv:quant-ph/0302047, v1 (2003).
- [33] Maniscalco, S.; Intravaia, F.; Piilo, J. and Messina, A. “Misbelief and Misunderstandings on the Non-Markovian Dynamics of a Damped Harmonic Oscillator”. arXiv: quant-ph/0306193, v3 (2003).
- [34] Ahn, D., Lee, J., Kim, M. S. and Hwang, S. W., “Self-consistent non-Markovian theory of a quantum-state evolution for quantum-information processing”. *Phys. Rev. A*, 66, 012302, (2002).
- [35] Wiseman, H. M., “Quantum Theory of continuous feedback”. *Phys. Rev. A*, 49, 4 (1993).
- [36] Arrighi, P. and Patricot, C., “On Quantum Operations as Quantum States”. arXiv:quant-ph/0307024 v3, (2003).
- [37] Tarasov, V. E., “Quantum Computations by Quantum Operations on Mixed 73 States”. arXiv:quant-ph/0201033, v1 (2002).
- [38] Kandel, Eric R.; Schwarts, James H. and Thomas M., Jessell, *Principles of Neural Science* (Appleton & Lange Norwalk), 3rd ed. (1991).

- [39] Hagan, S., Hameroff, S. R. and Tuszynski, J. A, “Quantum Computation in Brain Microtubules: Decoherence and Biological Feasibility”, *Physical Review E*. volume 65 - 061901, (2002).
- [40] Hameroff, S. R. and Penrose, R., “Orchestrated Reduction of Quantum Coherence in Brain Microtubules”, in S. Hameroff, A . K. Kaszaniak and A .C. Scott, *Toward a Science of Consciousness*, MIT Press, Cambridge, (1996).
- [41] Hameroff, S. R. and Penrose, R., *Journal of Consciousness Studies* 3, 1, 36 (1996).
- [42] Hameroff, S. “Quantum computation in microtubules? The Penrose-Hameroff ‘Orch OR’ model of consciousness”. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* (London) 356, 1869 (1998)
- [43] Hameroff, S., “Quantum biology: At what levels are quantum effects relevant?” *In Proceedings Quantum Mind 2003: ”Consciousness, Quantum Physics and the Brain”*, Convention Center and Leo Rich Theater, Tucson, Arizona, (2003).
- [44] Hameroff, S. “Testing the biological basis of the Orch-OR model of consciousness”. *In Proceedings Quantum Mind 2003: ”Consciousness, Quantum Physics and the Brain”*, Convention Center and Leo Rich Theater, Tucson, Arizona, (2003).
- [45] Hameroff, S.R., Rasmussen, S. & Mansson, B., “Molecular automata in microtubules: basic computational logic of the living state?” *In Artificial life*. New York: Addison-Wesley, (1988).
- [46] Hawking, S. and Penrose, R., *The Nature of Space and Time*, Princenton University Press, N. Jersey, (1996).
- [47] Penrose, R., *The Emperor’s New Mind*, Oxford University Press, (1989).
- [48] Penrose, R., *Shadows of the Mind*, Vintage, London, (1994).
- [49] Penrose, R. *et al*, *The Large, the Small and the Human Mind*, Cambridge Univetrsrity Press, (1996).

- [50] Stapp, H., *Mind, Matter and Quantum Mechanics*, Spring Verlag, Berlin, (1993).
- [51] Jibu, M., Hagan, S. and Yasue, K., "Sub cellular Quantum Optical Coherence", in S. Hameroff *et al*, *Toward a Science of Consciousness*, MIT Press, Cambridge, (1996).
- [52] Jibu, M. and Yasue, K., "Introduction to Quantum Brain Dynamics", *Nature* 43 (1998).
- [53] Jibu, M., Pribram, K. H. and Yasue, K., *Int. J. Mod. Phys.* 10, 1735, (1996).
- [54] Mershin, A., Experimental "quantum brain"? *In Proceedings Quantum Mind 2003: "Consciousness, Quantum Physics and the Brain"*, Convention Center and Leo Rich Theater, Tucson, Arizona, (2003).
- [55] Mavromatos, N.E. and Nanopoulos, D.V., "On Quantum Mechanical Aspects of Microtubules", *Int. J. Mod. Phys.* B12, 517, B11 (1998).
- [56] Zohar, D., "Consciousness and Bose Einstein Condensates", in S. Hameroff et al, *Toward a Science of Consciousness*, MIT Press, Cambridge, (1996).
- [57]. Georgiev, D., "Electric and magnetic fields inside neurons and their impact upon the cytoskeletal microtubules". *Cogprints*: 3190 (2003).
- [58]. Georgiev, D., "Solitonic effects of the local electromagnetic field on neuronal microtubules-tubulin tail sine-Gordon solitons could control MAP attachment sites and micro-tubule motor protein function". *Cogprints*: 3894 (2004).
- [59] Genberg, L., Richard, L., McLendon, G., and Dwayne-Miller, R.J., "Direct observation of global protein motion in hemoglobin and myoglobin on picosecond time scales". *Science*, 251, 1051 (1991).
- [60] Neubauer, C., Phelan, A.M., Keus, H., and Lange, D.G., "Microwave irradiation of rats at 2.45 GHz activates pinocytotic-like uptake of tracer by capillary endothelial cells of cerebral cortex". *Bioelectromagnetics* 11, 261, (1990).
- [61] Carlier, M.F., Didry, D., Melki, R., Chabre, M. & Pantaloni, D., "Stabilization of microtubules by inorganic phosphate and its structural analogues, the fluoride complexes of

- aluminum and beryllium”. *Biochemistry* 27, 3555 (1988).
- [62] Carlier, M.F., Didry, D., Simon, C. & Pantaloni, D., “Mechanism of GTP hydrolysis in tubulin polymerization: characterization of the kinetic intermediate microtubule-GDP-Pi using phosphate analogues”. *Biochemistry* 28, 1783 (1989).
- [63] Kuo-Chen, C., Zhang, C-T., & Maggiora, G.M., “Solitary wave dynamics as a mechanism for explaining the internal motion during microtubule growth”. *Biopolymers* 34, 143 (1994).
- [64] Diwan, J.J., *Molecular Biology Of Cell: Microtubules*. <http://www.dentistry.leeds.ac.uk/biochem/MBWeb/mb2/part1/microtub.htm> (2002).
- [65] Drechsel, D.N. & Kirschner, M.W., “The minimum GTP cap required to stabilize microtubules”. *Curr. Biol.* 4, 1053 (1994).
- [66] Mandelkow, E.M., Mandelkow, E. & Milligan, R.A., “Microtubule dynamics and microtubule caps: a time-resolved cryo-electron microscopy study”. *J Cell Biol.* 114, 977 (1991).
- [67] Mitchison, T. & Kirschner, M., “Dynamic instability of microtubule growth”. *Nature*. 312, 237 (1984).
- [68] Richards, K.L., Anders, K.R., Nogales, E., Schwartz, K., Downing, K.H. & Botstein, D., “Structure-Function Relationships in Yeast Tubulins”. *Molecular Biology of the Cell* 11, 1887 (2000).; <http://www.molbiolcell.org/cgi/content/abstract/11/5/1887>
- [69] Iqbal, A. and Toor, A. H., “Evolutionarily stable strategies in quantum games”. *Physics Letters A* 280/5-6, pp 249-256 (2001).
- [70] Iqbal, A. and Toor, A., “Quantum mechanics gives stability to a Nash equilibrium”. *Physical Review A* 65, 022306 (2002).
- [71] Iqbal, A., *Studies in the Theory of Quantum Games*, Ph.D. thesis (2004). arXiv:quant-ph/0503176 v1
- [72] Satarić, M. V., Žakula, R. B., Zeković, S. and Tuszyński, J. A., “Moessbauer effect as a

- possible tool in detecting nonlinear excitations in microtubules”, *Phys. Scr.* 46, 315, (1993).
- [73] Tuszyński, J. A., Hameroff, S., Satarić, M., Trpisöva, B. and Nip, M., “Ferroelectric behavior in microtubule dipole lattices: implications for information processing, signaling and assembly/disassembly ”, *J. Theor. Biol.* 174, 371, (1995).
- [74] Satarić, M. V., Žákula, R. B., Zeković, S., Pokorny, J. and Fiala, J., “The change of microtubule length caused by endogenous AC fields in cell”, *BioSystems* 396, 127 (1996).
- [75] Satarić, M. V., Pokorny, J., Fiala, J., Žákula, R. B. and Zeković, S., “Microtubules in interactions with endogenous d.c. and a.c. fields in living cells”, *Bioelectrochem. Bioenerg.* 41, 53, (1996).
- [76] Brown, J. A. and Tuszyński, J. A., “Dipole interactions in axonal microtubules as a mechanism of signal propagation”, *Phys. Rev. E* 56, 5834, (1997).
- [77] Trpsova, B. and Tuszyński, J. A., “Possible link between guanosine 5|IH triphosphate hydrolysis and solitary waves in microtubules ”, *Phys. Rev. E* 55, 3288, (1997).
- [78] Tuszyński, J. A., Trpišová, B. Sept, D. and Satarić, M.V., “The Enigma of Microtubules and their Self-organization Behavior in the Cytoskeleton”. *Biosystems* 42, 153-175, (1997).
- [79] Tuszyński, J. A., Brown, J. A. and Hawrylak, P. “Dielectric Polarization, Electric Conduction, Information Processing and Quantum Computation in Microtubules. Are They Plausible?”, *The Royal Society*, 356, 1897-1926, (1998).
- [80] Tuszyński, J.A., Hameroff, S. R., Satarić, M.V., Trpišová, B. and Nip, M. L. A., “Ferroelectric Behavior in Microtubule Dipole Lattices: Implications for Information Processing, Signaling and Assembly/Disassembly”. *Journal Theoretical Biology*, 174, 371-380, (1995).
- [81] Rosero, A. F. H., *Classification of Quantum Symmetric Nonzero-Sum 2x2 Games in The Eisert Scheme*. (Msc Thesis, 2004), arXiv:quant-ph/0402117 v2.
- [82] Deutsch, D., “Quantum Theory, The Church-Turing Principle and The Universal Quantum Computer”. *Proceedings of the Royal Society of London A* 400, 97-117 (1985).

- [83] Deutsch, D., Barenco, A. and Ekert, A., “Universality in Quantum Computation”. arXiv:quant-ph/9505018 v1 (1995).
- [84] Deutsch, D.; Ekert, A. and Lupacchini, R., “Machines, Logic and Quantum Physics”, arXiv:math - HO/9911150 v1 (1999).
- [85] Shor, P., “Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithm and Factoring”, *Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* 72, 124-134 (1994).
- [86] Lavor, C.; Manssur, L.R.U. and Portugal, R. “Grovers Algorithm: Quantum Database Search” arXiv:quant-ph/0301079 v1 (2003).
- [87] Feynman, R. P., “Simulating Physics with Computers”, *Intr. F. Theor. Phys.*, 21, 467 (1982).
- [88] Deutsch, D., *A Essência da Realidade*. Makron Books, (1997).
- [89] Faber, J. & Giraldi, G. A., *Quantum Models for Artificial Neural Network*. Relatório Técnico de Pesquisa LNCC 44 (2002). <http://www.lncc.br/proj-pesq>.
- [90] Faber, J. and Portugal, R., “Computação Quântica”, *NanoBio* 2004.
- [91] Iqbal, A., “Playing games with EPR-type experiments”, *Math. Gen.* 38, 9551, (2005).
- [92] Lee, C. F. and Johnson, N. F., “Efficiency and formalism of quantum games”, *Phys. Rev. A* 67, 022311 (2003).
- [93] Enk, S. J. van and Pike, R., “Classical rules in quantum games”, *Phys. Rev. A* 66, 024306, (2002).
- [94] Chen, L.K., Ang, H., Kianga, D., Kwek, L.C., Lo, C.F., “Quantum prisoner dilemma under decoherence”, *Physics Letters A* 316, 317 (2003).
- [95] Kay, R., Johnson, N. F. and Benjamin, S. C., “Evolutionary quantum game”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 34, 547 (2001).
- [96] Johnson, N. F., “Playing a quantum game with a corrupted source”, *Phys. Rev. A* 63, 020302 (2001)

- [97] Johnson, N. F., Hui, P. M., Jonson, R. and Lo, T. S., “Self-Organized Segregation within an Evolving Population”, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3360 (1999).
- [98] Johnson, N. F., Leonard, D. J., Lo, T. S. and Hui, P. M., “Evolutionary freezing in a competitive population ”, *Physica A* 283, 568 (2000).
- [99] Nowak, M. A., Sigmund, K., “Evolutionary Dynamics of Biological Games”, *Science* 303, 6, (2004).
- [100] Du, J., Li, H., Xu, X., Shi, M., Wu, J., and Han, R., “Experimental realization of quantum games on a quantum computer”. *Physical Review Letters*, 88, 137902, (2002).
- [101] Enk, S. j. van and Pike, R., “Classical Rules in Quantum Games”. *Phys Rev A*, 66, 024306, (2002).
- [102] Ekert, A. K., “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).
- [103] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B. and Laloë, F., *Quantum Mechanics* vol. 1. John Wiley & Sons and Hermann, (1977).
- [104] Roland, O., *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton Series in Physics (1976).
- [105] Benjamin, S.C., “Comment on: A quantum approach to static games of complete information”, arXiv:quant-ph/0008127 (2000).
- [106] Genberg, L., Richard, L., McLendon, G., and Dwayne-Miller, R.J., “Direct observation of global protein motion in hemoglobin and myoglobin on picosecond time scales”. *Science*, 251, 1051 (1991).
- [107] Genzel, L., Kremer, F., Poglitsch, A., and Bechtold, G., “Relaxation processes on a picosecond time scale in hemoglobin and poly observed by millimeter-wave spectroscopy”. *Biopolymers* 22, 1715, 1729 (1983).
- [108] Neubauer, C., Phelan, A.M., Keus, H., and Lange, D.G., “Microwave irradiation of

rats at 2.45 GHz activates pinocytotic-like uptake of tracer by capillary endothelial cells of cerebral cortex”. *Bioelectromagnetics* 11, 261 (1990).

[109] Faber, J., *Computação Quântica em Sistemas Abertos e uma Aplicação ao Modelo Biológico de Fröhlich*, (Tese de Mestrado, LNCC 2003).

[110] Glanz, J., “Force-Carrying Web Pervades Living Cell”, *Science*, vol. 276, 5313, 678 (1997).

[111] Faber, J. and Rosa, L. P., “Quantum models of mind: are they compatible with decoherence?”, *Phys. Rev. E* 70, 031902 (2004). *Virtual Journal of Quantum Information* (www.vjquantuminfo.org/quantuminfo), (2004). *Virtual Journal of Biological* (www.vjbio.org), (2004).

[112] Faber, J., Portugal, R. and Rosa, L. P., “Information processing in brain microtubules”, arXiv.q-bio.SC/0404007 (*Aceito para publicação: BioSystems* - 2005).

[113] Haken, H. *Synergetics: An Introduction*. Springer, Berlin (1990).

[114] Tegmark, M., “Importance of quantum decoherence in brain processes”, *Phys. Rev. E* 61, 4194 (2000).

[115] Tegmark, M., “Apparent wave function collapse caused by scattering”, *Found. Phys. Lett.* 6, 571. (1993).

[116] Penrose, R., “On gravity’s role in quantum state reduction”, *Gen. Rel. and Grav*, 28, 581 (1996).

[117] Edelman, G., *Neural Darwinism*. New York: Basic Books (1988).

[118] Ge, Y., Watson, L., Collins, E., *Genetic Algorithms for Optimization on a Quantum Computer*, Unconventional Models of Computation, Springer-Verlag, London (1998).

[119] Faber, J., Thess, R. N. & Giraldi, G. A., *Learning Linear Operators by Genetic Algorithms*. Relatório Técnico de Pesquisa LNCC 05 (2003). <http://www.lncc.br/proj-pesq>.

- [120] Eiben, A. E., Schoenauer, M., “Evolutionary Computing”, *Information Processing Letters* 82, 1-6, (2002).
- [121] Goertzel, B., “Evolutionary Quantum Computation: Its Role in Brain, Its Realization in Electronic Hardware, and Its Implications for the Panpsychic Theory of Consciousness” (1993). <http://intelligenesis.net>
- [122] Goertzel, B., “Chance and consciousness in Mind in Time”, Edited by Combs, Germaine and Goertzel, New York: Hampton Press (1997).
- [123] Chalmers, D., *PSYCHE*, 2 (9), “Minds, Machines, and Mathematics” (1995).
- [124] Feferman, S., *PSYCHE*, 2 (7), “Penrose’s Gödelian Argument” (1995).
- [125] Klein, S., *PSYCHE*, 2 (3), “Is Quantum Mechanics Relevant to Understanding Consciousness?” (1995).
- [126] McCarthy, J., *PSYCHE*, 2 (11), “Awareness and Understanding Computer Programs” (1995).
- [127] Dennet, D., *Tipos de Mente, Rumor a uma compreensão da consciência*, Ciência Atual ROCCO (1997).
- [128] Jordan, C., *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y. 3rd (1979).
- [129] Turing, A. M., “On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem” *Proc. Lond. Math. Soc. Ser.*, v. 2, pp. 230-265 (1936).
- [130] Dunne, Paul E., *Computability Theory: Concepts and Applications*. 1st. Ellis Horwood (1991).
- [131] Reif, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill Kogakusha, LTD (1965).